ENVELOPPE
DER
EBENE EINES DREI EBENEN BERÜHRENDEN KREISES

INAUGURAL-DISSERTATION
VERFASST UND DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER KGL. BAYER. JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT AM 17. FEBRUAR 1913

VON

RAIMUND RÖTHLEIN
AUS ERLABRUNN.

DRUCK VON DER
WAILANDT'schen DRUCKEREI A.-G. IN ASCHAFFENBURG
1913.

ENVELOPPE
DER
EBENE EINES DREI EBENEN BERÜHRENDEN KREISES

INAUGURAL-DISSERTATION
VERFASST UND DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER KGL. BAYER. JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT AM 17. FEBRUAR 1913

VON

RAIMUND RÖTHLEIN
AUS ERLABRUNN.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

DRUCK VON DER
WAILANDT'schen DRUCKEREI A.-G. IN ASCHAFFENBURG
1913.

REFERENT: Prof. Dr. GEORG ROST.

Die Arbeit erscheint gleichzeitig als Programm
der K. Höh. Weibl. Bildungsanstalt Aschaffenburg.

Vorwort.

Vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung einer einfachen Aufgabe, nämlich der Bestimmung des geometrischen Ortes des Mittelpunktes eines dreiachsigen Ellipsoides, das stets die drei Koordinatenebenen berührt. Als Verfasser vorliegender Arbeit noch dem mathematischen Seminare der Universität Würzburg angehörte, wurde ihm genannte Aufgabe von seinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. G. Rost gestellt. Im Anschlusse hieran sollten die Envelloppen der von je zwei der drei Hauptachsen des Ellipsoids bestimmten Ebenen ermittelt werden. Hiezu war als vorbereitende Aufgabe das in vorliegender Arbeit behandelte Thema: „die Enveloppe der Ebene eines drei Ebenen berührenden Kreises" gedacht. Als die drei Ebenen wurden die Koordinatenebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems genommen. Die Durchführung genannten Problems gestaltete sich aber derartig umfangreich und schwierig, daß es am Seminare zwar zu einem teilweisen Abschluß kam, doch konnte man sich von der Gestalt der Enveloppe noch keine rechte Vorstellung machen. Erst nach einigen Jahren gelang es, die Arbeit zu einem glücklichen Abschlusse zu bringen und insbesondere die Gestalt der Enveloppe klar herauszuarbeiten. Die dabei angewandten Methoden und die gewonnenen Resultate sind im folgenden niedergelegt.

Für die Anregung und vielfache liebenswürdige Unterstützung bei der Bearbeitung des vorliegenden Themas meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. G. Rost, meinen besten Dank auszusprechen, möchte ich auch an dieser Stelle nicht verfehlen.

Aschaffenburg, im Februar 1913.

R. Röthlein.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung. Aufstellung der Flächengleichung.

I. Teil. Die singulären Tangentenebenen der Fläche.

§ 1. Die Koordinatenebenen.
§ 2. Die Tangentenebenen parallel zu den Koordinatenachsen.
§ 3. Die Tangentenebenen durch die Koordinatenachsen.
§ 4. Die Tangentenebenen parallel zu den Winkelhalbierenden in den Koordinatenebenen.
§ 5. Die Tangentenebenen $|u| = |v| = |w| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2r}\right|$
§ 6. Die unendlich ferne Ebene.

II. Teil. Die Gestalt der Fläche.

§ 1. Einleitung. Umformung der Flächengleichung.
§ 2. Die Kurven $k = 0$.
§ 3. Die Kurven $\varphi = 0$.
§ 4. Die Kurven $\varphi = 45^0$.
§ 5. Die Kurven $\varphi = 30^0$ und $\varphi = 60^0$.
§ 6. Die Kurven $\varphi = 15^0$ und $\varphi = 75^0$.
§ 7. Ort der Berührungspunkte der Tangentenebenen parallel zur Schnittgeraden der Winkelhalbierungsebenen zwischen den Koordinatenebenen.
§ 8. Der Schnitt der Winkelhalbierungsebenen zwischen den Koordinatenebenen mit der Fläche.
§ 9. Schluß.

Lebenslauf.

Ich, **Raimund Röthlein,** geboren am 30. August 1882 zu Erlabrunn, katholischer Konfession, Sohn des Landwirtes Silverius Röthlein und dessen Ehefrau Katharina in Karlstadt a. Main, besuchte vom Jahre 1888 bis zum Jahre 1895 die Volksschule zu Erlabrunn und Karlstadt a. Main, von 1895 bis 1903 das Kgl. Neue Gymnasium zu Würzburg und vom Jahre 1903 bis 1907 die Universität Würzburg, wo ich die Vorlesungen folgender Lehrer hörte: Abert, Beckenkamp, Boll, Braun, Cantor, Chroust, Gillmann, Henner, Kaerst, Külpe, Manchot, Merkle, Prym, Roettecken, Rost, Schell, Scherer, Seitz, Selling, Stölzle, Wien. 1907/08 nahm ich an einem pädagogisch-didaktischen Kurse am Kgl. Realgymnasium in Würzburg teil. Von 1908—1910 war ich an der Real- und Handelsschule in Miltenberg Lehrer der Mathemathik und Physik. Seit Herbst 1910 bin ich als Präparandenlehrer an der Kgl. Höheren Weiblichen Bildungsanstalt Aschaffenburg tätig. Die mündliche Prüfung fand am 26. Mai 1913 statt.

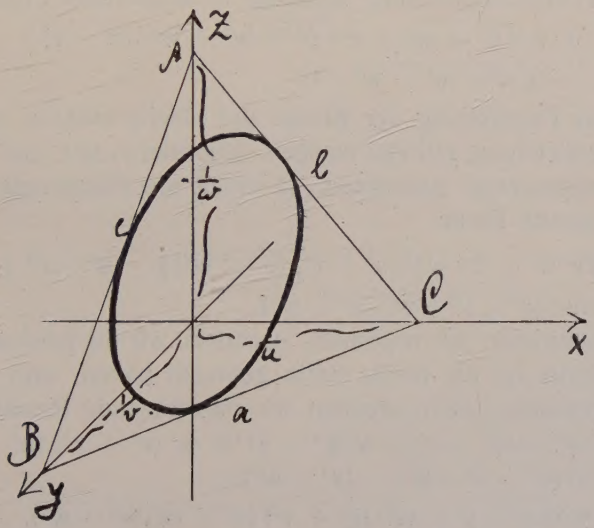
Einleitung.

Aufstellung der Flächengleichung.

Zwischen einer ebenen Fläche F und ihren Projektionen F_1, F_2, F_3 in die Koordinatenebenen eines rechtwinkligen räumlichen Systems besteht die Beziehung:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Die Ebene des Kreises schneidet in beliebiger Lage die Koordinatenachsen in drei Punkten, deren Verbindungslinien



ein Dreieck bilden, dem der Kreis mit dem Radius r einbeschrieben ist. Bezeichnen wir die negativen reziproken Achsenabschnitte der Kreisebene mit u, v, w, so erhalten wir für die Fläche Δ des Dreiecks nach obiger Formel den

folgenden Ausdruck:

$$\Delta^2 = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{4\,u^2\,v^2\,w^2};$$

hieraus $$\Delta = \frac{1}{2\,u\,v\,w}\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Zwischen dem Radius des einem Dreiecke einbeschriebenen Kreises, dem Flächeninhalt des Dreiecks und den Seiten desselben besteht die Beziehung.

$$r = \frac{2\Delta}{a + b + c}.$$

Für die Seiten des Dreiecks ABC unserer Figur erhalten wir die folgenden Werte:

$$a = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^2\,v^2}}, \quad b = \sqrt{\frac{u^2 + w^2}{u^2\,w^2}}, \quad c = \sqrt{\frac{v^2 + w^2}{v^2\,w^2}}.$$

Setzen wir diese Werte für a, b, c in obige Formel ein und schaffen wir gleichzeitig die Nenner weg, so erhalten wir die Flächengleichung zunächst in irrationaler Form:

$$r\,(u\sqrt{u^2 + w^2} + v\sqrt{u^2 + w^2} + w\sqrt{u^2 + v^2}) - \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 0.$$

Zur Feststellung der Klasse der Fläche müssen wir die Flächengleichung rational machen. Quadrieren wir und fassen wir entsprechend zusammen, so erhält die Flächengleichung die folgende Form:

$$r^2\,(2v^2\,w^2 + 2v\,w\sqrt{(u^2 + v^2)\,(u^2 + w^2)}) = (u^2 + v^2 + w^2) - 2\,ru\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)\,(v^2 + w^2)}.$$

Quadrieren wir nochmals, nachdem wir die beiden Wurzeln allein auf die rechte Seite gebracht haben, und fassen wir zusammen, dann erhalten wir das folgende Resultat:

$$(2r^2\,v^2\,w^2 - (u^2 + v^2 + w^2))^2 - 4r^4\,v^2\,w^2\,(u^2 + v^2)\,(u^2 + w^2) - 4r^2\,u^2\,(u^2 + v^2 + w^2)\cdot(v^2 + w^2) = 8r^3\,u\,v\,w\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)\,(u^2 + v^2)\,(u^2 + w^2)\,(v^2 + w^2)}.$$

Nach nochmaligem Quadrieren erscheint die Flächengleichung in rationaler Form:

$$[(2r^2\,v^2\,w^2 - (u^2 + v^2 + w^2)]^2 - 4r^4\,v^2\,w^2\,(u^2 + v^2)\,(u^2 + w^2) - 4r^2\,u^2\,(u^2 + v^2 + w^2)\cdot(v^2 + w^2)]^2 = 64r^6\,u^2\,v^2\,w^2\,(u^2 + v^2 + w^2)\,(u^2 + v^2)\,(u^2 + w^2)\,(v^2 + w^2).$$

Nach leichter Umformung können wir aus der eckigen Klammer den Faktor $(u^2 + v^2 + w^2)$ heraussetzen und dann links und rechts einmal damit wegdividieren. Wir erhalten sodann die Flächengleichung in ihrer endgiltigen Form, dargestellt in Ebenenkoordinaten:

$$(u^2 + v^2 + w^2)\,[(u^2 + v^2 + w^2) - 4r^2\,(u^2\,v^2 + u^2\,w^2 + v^2\,w^2) - 4r^4\,u^2\,v^2\,w^2]^2 - 64r^6\,u^2\,v^2\,w^2\,(u^2 + v^2)\,(u^2 + w^2)\,(v^2 + w^2) = 0.$$

Wir erhalten somit als Enveloppe der Ebene des die drei Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems berührenden Kreises eine Fläche vierzehnter Klasse, deren Diskussion im folgendem ausgeführt wird, und zwar soll der erste Teil der Untersuchung den singulären Tangentenebenen, der zweite Teil der Gestalt der Fläche gewidmet sein.

I. TEIL.

Die singulären Tangentenebenen der Fläche.

§ 1. Die Koordinatenebenen.

Wir untersuchen zunächst die (X Y)-Ebene. Infolge der Symmetrie der Fläche gelten die sich ergebenden Resultate in gleicher Weise auch für die (X Z)- und (Y Z)-Ebene.

Es stehen zwei Wege offen, um die Art der Singularität der (X Y)-Ebene zu bestimmen. Der erste Weg ist der gewöhnliche, nämlich die Bestimmung der Singularität durch Untersuchung der Derivierten. Nun zeigt sich aber, daß für $u'=0$, $v'=0$, $t'=0-t'$ ist homogenisierende Variable — sämtliche Derivierten bis zur achten Ordnung verschwinden, dagegen sind die Derivierten achter Ordnung nicht alle gleich Null. Es müßten also alle Derivierten bis zur achten Ordnung einschließlich gebildet werden, was viel zu umständlich wäre.

Wir gehen deshalb den zweiten Weg, der einfacher und schneller zum Ziele führt.

Da die (X Y)-Ebene zu den Erzeugenden der Fläche gehört, so erhalten wir die Berührungspunkte dieser Ebene mit der Fläche durch folgendes Verfahren. Wir machen die Flächengleichung homogen, setzen hierauf $u=0$, $v=0$, $t=0$, $w=1$, fassen die Glieder der niedrigsten Dimension zusammen und setzen diese für sich gleich Null. Letztere Gleichung liefert uns sodann die Berührungspunkte der (X Y)-Ebene

mit der Fläche; dabei entspricht die gefundene Gleichung dem Ausdrucke

$$\triangle F'^{VIII} = \left(u \frac{\delta F'}{\delta u'} + v \frac{\delta F'}{\delta v'} + w \frac{\delta F'}{\delta w'} + t \frac{\delta F'}{\delta t'}\right)^8.$$

Die homogenisierte Flächengleichung hat die folgende Form:

$$(u^2 + v^2 + w^2)\,[(u^2 + v^2 + w^2)\,t^4 - 4r^2\,(u^2 v^2 + u^2 w^2 + v^2 w^2)\,t^2 - 4r^4 u^2 v^2 w^2]^2 - 64 r^6 u^2 v^2 w^2 t^2 (u^2 + v^2)(u^2 + w^2)(v^2 + w^2) = 0.$$

Setzen wir nun $w = 1$, fassen die Glieder der niedrigsten Dimension zusammen und setzen diese für sich gleich Null, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$16 r^8 u^4 v^4 + 32 r^6 u^2 v^2 (u^2 + v^2)\,t^2 + 16 r^4 (u^2 + v^2)^2 t^4 - 8 r^4 u^2 v^2 t^4 - 8 r^2 (u^2 + v^2)\,t^6 - 64 r^6 u^2 v^2 (u^2 + v^2)\,t^2 + t^8 = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine zerfallende Fläche achter Klasse dar, wofür im folgenden der Beweis zu erbringen ist. Setzen wir $t = 1$ und fassen zusammen, so bekommen wir folgende Form der Gleichung:

$$(4 r^4 u^2 v^2 - 1)^2 - 4 r^2 (8 r^4 u^2 v^2 + 2)(u^2 + v^2) + 16 r^4 \cdot (u^2 + v^2)^2 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich weiter zerlegen. Schreiben wir nämlich das mittlere Glied der Gleichung in der folgenden Form:

$$4 r^2 \{(4 r^4 u^2 v^2 - 4 r^2 u v + 1) + (4 r^4 u^2 v^2 + 4 r^2 u v + 1)\} \cdot (u^2 + v^2),$$

so können wir es folgendermaßen umformen:

$$4 r^2 \{(2 r^2 u v - 1)^2 + (2 r^2 u v + 1)^2\}\,(u^2 + v^2).$$

Beachten wir weiter, daß $(4 r^4 u^2 v^2 - 1)^2$ sich in die Faktoren $(2 r^2 u v - 1)^2\,(2 r^2 u v + 1)^2$ zerlegen läßt, so erscheint die Gleichung der Berührungspunkte in der folgenden Gestalt:

$$(2 r^2 u v - 1)^2 (2 r^2 u v + 1)^2 - 4 r^2 (u^2 + v^2) \cdot \{(2 r^2 u w - 1)^2 + (2 r^2 u w + 1)^2\} + 16 r^4 (u^2 + v^2)^2 = 0.$$

Durch eine weitere Umformung ergibt sich:

$$(2\,r^2\,u\,v - 1)^2\,[(2\,r^2\,u\,v + 1)^2 - 4\,r^2\,(u^2 + v^2)] - 4\,r^2\,(u^2 + v^2)\,[(2\,r^2\,u\,v + 1)^2 - 4\,r^2\,(u^2 + v^2)] = 0.$$

Setzen wir den gemeinsamen Faktor heraus, so erhalten wir das folgende Produkt:

$$[(2\,r^2\,u\,v + 1)^2 - 4\,r^2\,(u^2 + v^2)] \cdot [(2\,r^2\,u\,v - 1)^2 - 4\,r^2\,(u^2 + v^2)] = 0.$$

Hieraus ergeben sich sofort die beiden folgenden Gleichungen:

$$(2\,r^2\,u\,v + 1)^2 - 4\,r^2\,(u^2 + v^2) = 0.$$
$$\text{und } (2\,r^2\,u\,v - 1)^2 - 4\,r^2\,(u^2 + v^2) = 0.$$

Es liegt nun die Frage nahe: Lassen sich diese Gleichungen nicht noch weiter zerlegen? Wir betrachten zu diesem Zweck die erste der beiden Gleichungen $(2\,r^2\,u\,v + 1)^2 - 4\,r^2\,(u^2 + v^2) = 0$. Bringen wir in dieser Gleichung das erste Glied auf die Form $(2\,r^2\,u\,v - 1)^2$, so erhält auch das zweite Glied, wenn wir das aus der Umformung des ersten Gliedes sich ergebende Glied $+ 8\,r^2\,u\,v$ hinzunehmen, quadratische Form, nämlich $4\,r^2\,(u - v)^2$. Wir haben nunmehr die Differenz zweier Quadrate, nämlich:

$$(2\,r^2\,u\,v - 1)^2 - 4\,r^2\,(u - v)^2 = 0.$$

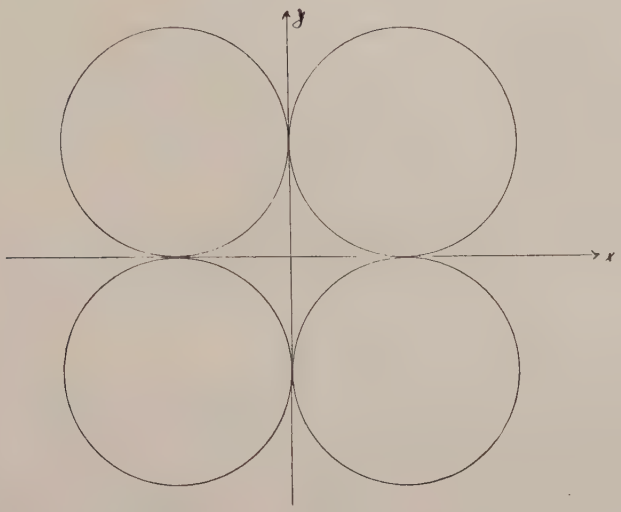
Dieser Ausdruck läßt sich aber in ein Produkt zweier Faktoren zerlegen und wir erhalten dadurch die beiden folgenden Gleichungen:

$$2\,r^2\,u\,v - 1 - 2\,r\,(u - v) = 0,$$
$$\text{und } 2\,r^2\,u\,v + 1 + 2r\,(u + v) = 0.$$

Wir erkennen somit, daß die Fläche achter Klasse in vier Flächen zweiter Klasse zerfällt. Die Untersuchung dieser Flächen zeigt, daß auch sie weiter zerfallen. Die vier gefundenen Gleichungen sind Kreisgleichungen in Linienkoordinaten. Jeder der Kreise berührt die beiden Koordinatenachsen. Der Radius der Kreise ist r; die Koordinaten der Mittelpunkte sind:

$$(+\,r,\ +\,r),\ (+\,r,\ -\,r),\ (-\,r,\ -\,r),\ (-\,r,\ +\,r).$$

Die Lage der Kreise wird durch die Zeichnung genau veranschaulicht.



Es wurde bereits oben erwähnt, daß die sich ergebenden Resultate auch für die (X Z)- und (Y Z)-Ebene gelten. Es berühren demnach die drei Koordinatenebenen die vorliegende Fläche in je vier Kreisen, deren Lage sich aus der Zeichnung ergibt.

§ 2. Die Tangentenebenen parallel zu den Koordinatenachsen.

Eine beliebige Tangentenebene der Fläche parallel zur X-Achse hat die Koordinaten $(0, v,' w')$. Wollen wir den Berührungspunkt dieser Ebene mit der Fläche bestimmen, so haben wir uns die ersten Derivierten für die Werte $(0, v', w', t')$ zu berechnen und die erhaltenen Resultate in die Gleichung

$$\left(u\frac{\delta F'}{\delta u'} + v\frac{\delta F'}{\delta v'} + w\frac{\delta F'}{\delta w'} + t\frac{\delta F'}{\delta t'}\right) = 0.$$

einzusetzen.

Für (u', v', w', t') erhält die Flächengleichung die Gestalt:

$$(u'^2 + v'^2 + w'^2)\,[(u'^2 + v'^2 + w'^2)\,t'^4 - 4r^2\,(u'^2 v'^2 + u'^2 w'^2 \cdot + v'^2 w'^2)\,t'^2 - 4r^4 u'^2 v'^2 w'^2]^2 - 64r^6 u'^2 v'^2 w'^2 t'^2\,(u'^2 + v'^2) \cdot (u'^2 + w'^2)\,(v'^2 + w'^2) = 0.$$

Der einfacheren Schreibweise wegen mögen folgende Abkürzungen eingeführt werden:

Wir setzen für $(u'^2 + v'^2 + w'^2) = e'$,

für $[(u'^2 + v'^2 + w'^2)\,t'^4 - 4r^2\,(u'^2 v'^2 + u'^2 w'^2 + v'^2 w'^2)\,t'^2 - r^4 u'^2 v'^2 w'^2]^2 = f'^2$,

und für $(u'^2+v'^2)(u'^2+w'^2)(v'^2+w'^2)=g'$.

Die Flächengleichung erscheint dann in der Form:

$F' \equiv e'\,f'^2 - 64r^6 u'^2 v'^2 w'^2 t'^2 g' = 0.$

Die ersten Derivierten lauten:

$$\frac{\delta F'}{\delta u'} = 2u'\,f'^2 + 2e'\,f'\frac{\delta f'}{\delta u'} - 128r^6 u'\,v'^2 w'^2 t'^2 g' - 64r^6 u'^2 v'^2 w'^2 t'^2 \frac{\delta g'}{\delta u'};$$

$$\frac{\delta F'}{\delta v'} = 2v'\,f'^2 + 2e'\,f'\frac{\delta f'}{\delta v'} - 128r^6 u'^2 v'^2 w'^2 t'^2 g' - 64r^6 u'^2 v'^2 w'^2 t'^2 \frac{\delta g'}{\delta v'};$$

$$\frac{\delta F'}{\delta w'} = 2w'\,f'^2 + 2e'\,f'\frac{\delta f'}{\delta w'} - 128r^6 u'^2 v'^2 w'^2 t'^2 g' - 64r^6 u'^2 v'^2 w'^2 t'^2 \frac{\delta g'}{\delta w'};$$

$$\frac{\delta F'}{\delta t'} = 2\,e'\,f'\,\frac{\delta f'}{\delta t'} - 128\,r^6 u'^2 v'^2 w'^2 t' g'.$$

Setzen wir nun $u' = 0$, so ergibt sich, wenn wir gleichzeitig beachten, daß für $u' = 0$ die Flächengleichung sich auf $(v'^2 + w'^2)t'^2 - 4r^2 v'^2 w'^2 = 0$ reduziert, daß sämtliche ersten Derivierten verschwinden, es werden

$$\frac{\delta F'}{\delta u'} = 0,\ \frac{\delta F'}{\delta v'} = 0,\ \frac{\delta F'}{\delta w'} = 0 \text{ und } \frac{\delta F'}{\delta t'} = 0.$$

Aus dem Verschwinden der ersten Derivierten folgt, daß die Ebene $(0, v', w', t')$ eine singuläre Tangentenebene der Fläche ist. Da aber diese Ebene beliebig aus den Tangentenebenen

der Fläche parallel zur X-Achse herausgegriffen wurde, folgt weiter, daß alle diese Tangentenebenen singuläre Tangentenebenen der Fläche sind.

Welcher Art ist nun die Singularität der Erzeugenden der Fläche parallel zur X-Achse? Wir erhalten darüber Aufschluß, wenn wir die zweiten Derivierten zu Hilfe nehmen, die folgender Relation genügen müssen:

$$\left(u^2\frac{\delta^2 F'}{\delta u'^2}+2uv\frac{\delta^2 F'}{\delta u'\delta v'}+v^2\frac{\delta^2 F'}{\delta v'^2}+2uw\frac{\delta^2 F'}{\delta u'\delta w'}+2vw\frac{\delta^2 F'}{\delta v'\delta w'}\right.$$
$$+w^2\frac{\delta^2 F'}{\delta w'^2}+2ut\frac{\delta^2 F'}{\delta u'\delta t'}+2vt\frac{\delta^2 F'}{\delta v'\delta t'}+2wt\frac{\delta^2 F'}{\delta' w\delta t'}$$
$$\left.+t^2\frac{\delta^2 F'}{\delta t'^2}\right)=0\cdot$$

Damit im weiteren Verlauf der Rechnungen die Uebersicht nicht zu sehr erschwert wird, mögen diejenigen Ausdrücke, welche für $u'=0$ verschwinden, unberücksichtigt bleiben. Wir erhalten sodann für die zweiten Derivierten folgende Ausdrücke:

$$\frac{\delta^2 F'}{\delta u'^2}=-128\,r^6 v'^4 w'^4 (v'^2+w'^2);$$
$$\frac{\delta^2 F'}{\delta u'\delta v'}=0;\quad \frac{\delta^2 F'}{\delta v'^2}=2e'\left(\frac{\delta f'}{\delta t'}\right)^2;$$
$$\frac{\delta^2 F'}{\delta u'\delta w'}=0;\quad \frac{\delta^2 F'}{\delta v'\delta w'}=2e'\frac{\delta f'}{\delta v'}\cdot\frac{\delta f'}{\delta w'};\quad \frac{\delta^2 F'}{\delta w'^2}=2e'\left(\frac{\delta f'}{\delta w'}\right)^2;$$
$$\frac{\delta^2 F'}{\delta u'\delta t'}=0;\quad \frac{\delta^2 F'}{\delta v'\delta t'}=2e'\frac{\delta f'}{\delta v'}\cdot\frac{\delta f'}{\delta t'};\quad \frac{\delta^2 F'}{\delta w'\delta t'}=2e'\frac{\delta f'}{\delta w'}\cdot\frac{\delta f'}{\delta t'};$$
$$\frac{\delta^2 F'}{\delta t'^2}=2e'\left(\frac{\delta f'}{\delta t'}\right)^2.$$

Setzen wir diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhalten wir eine Fläche zweiter Klasse. Ihre Gleichung lautet:

$$\left(-128\,r^6 v'^4 w'^4 (v'^2+w'^2)u^2+2e'\left(\frac{\delta f'}{\delta v'}\right)^2 v^2\right.$$
$$+2\cdot 2e'\frac{\delta f'}{\delta v'}\cdot\frac{\delta f'}{\delta w'}vw+2e'\left(\frac{\delta f'}{\delta w'}\right)^2 w^2+2\cdot 2e'\frac{\delta f'}{\delta v'}\cdot\frac{\delta f'}{\delta t'}vt$$
$$\left.+2\cdot 2e'\frac{\delta f'}{\delta w'}\cdot\frac{\delta f'}{\delta t'}wt+2e'\left(\frac{\delta f'}{\delta t'}\right)^2 t^2\right)=0.$$

Beachten wir, daß $(v'^2 + w'^2) = e'$ ist, und setzen wir $t = 1$, so erhalten wir nach Division der Gleichung mit $2e'$ die folgende einfache Form obiger Gleichung:

$$\left[64 r^6 v'^4 w'^4 u^2 - \left(\frac{\delta f'}{\delta v'} v + \frac{\delta f'}{\delta w'} w + \frac{\delta f'}{\delta t'} \right)^2 \right] = 0.$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, daß die Fläche zweiter Klasse zerfällt. Wir erhalten die beiden folgenden Gleichungen:

$$8 r^3 v'^2 w'^2 u - \left(\frac{\delta f'}{\delta v'} v + \frac{\delta f'}{\delta w'} w + \frac{\delta f'}{\delta t'} \right) = 0$$

und $$8 v^3 v'^2 w'^2 u + \left(\frac{\delta f'}{\delta v'} v + \frac{\delta f'}{\delta w'} w + \frac{\delta f'}{\delta t'} \right) = 0.$$

Setzen wir nun noch die Werte von

$$\frac{\delta f'}{\delta v'} = 2v' (1 - 4 r^2 w'^2),$$

$$\frac{\delta f'}{\delta w'} = 2 w' (1 - 4 r^2 v'^2),$$

$$\frac{\delta f'}{\delta t'} = 8 r^2 v'^2 w'^2,$$

in obige Gleichungen ein und dividieren mit $8 r^2 v'^2 w'^2$, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$ru - \left[\left(\frac{1 - 4 r^2 w'^2}{4 r^2 v' w'^2} \right) v + \left(\frac{1 - 4 r^2 v'^2}{4 r^2 v'^2 w'} \right) w + 1 \right] = 0,$$

$$ru - \left[\left(\frac{1 - 4 r^2 w'^2}{4 r^2 v' w'^2} \right) v + \left(\frac{1 - 4 r^2 v'^2}{4 r^2 v'^2 w'} \right) w + 1 \right] = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind je die Gleichung eines Punktes, in welchen die Tangentenebene $(0, v', w')$ die Fläche berührt. Sie ist ein bipunktuelle Tangentialebene.

Es berührt somit jede Tangentenebene parallel zur X-Achse die Fläche in zwei Punkten, es sind bipunktuelle Tangentialebenen. Die Enveloppe dieser bipunktuellen Tangentialebenen ist ein Cylinder, dessen Gleichung lautet:

$$v'^2 + w'^2 - 4 r^2 v'^2 w'^2 = 0.$$

Dies ist ein Astroidencylinder, wie sich sogleich ergeben wird.

Die Berührungspunkte der Tangentialebene (0, v′, w′) haben die folgenden Punktkoordinaten:

$$x = \pm r,$$
$$y = \frac{1-4r^2 w'^2}{4r^2 v' w'^2},$$
$$z = \frac{1-4r^2 v'^2}{4r^2 v'^2 w'}.$$

Eliminieren wir aus den beiden letzten Gleichungen für y und z die Größen v′ und w′ unter Zuhilfenahme der Gleichung $(v'^2 + w'^2) - 4r^2 v'^2 w'^2 = 0$, so erhalten wir zwischen y und z die folgende Beziehung:

$$y^{2/3} + z^{2/3} = (2r)^{2/3}.$$

Das ist die Gleichung einer Astroide, die einem Kreise mit dem Radius 2r einbeschrieben ist. Mit $x = \pm r$ stellt obige Gleichung den Ort der Berührungspunkte der Tangentenebenen parallel zur X-Achse mit der Fläche dar, worauf im zweiten Teil der Abhandlung näher eingegangen werden wird.

Aus Gründen der Symmetrie ergeben sich dieselben Resultate für die Tangentenebenen der Fläche parallel zur Y- und Z-Achse.

Somit ergibt sich als Resultat: Die Tangentenebenen parallel zu den Koordinatenachsen sind singuläre Tangentenebenen der Fläche und zwar bipunktuelle Tangentenebenen.

§ 3. Die Tangentenebenen durch die Koordinatenachsen.

Soll eine Ebene einem Ebenenbüschel mit der X-Achse als Achse angehören, so müssen die Bedingungen $u' = 0$, $t' = 0$ erfüllt sein. Daß die Ebenen dieses Büschels den Erzeugenden der Fläche angehören, zeigt die Untersuchung der Flächengleichung. Sie verschwindet für $u' = 0$ und $t' = 0$.

Wir wollen im weiteren die Art der Singularität bestimmen. Setzen wir die Werte $u' = 0$, $t' = 0$ in die ersten und zweiten Derivierten des vorigen Paragraphen ein, so zeigt sich, daß alle Null sind. Aber auch die dritten Derivierten

verschwinden; die vierten Derivierten dagegen werden nicht alle zu Null. Es sind dies:

$$\frac{\delta^4 F'}{\delta u'^4},\ \frac{\delta^4 F'}{\delta u'^2 \delta t'^2} \text{ und } \frac{\delta^4 F'}{\delta t'^4}.$$

Die Werte dieser Ableitungen sind:

$$\frac{\delta^4 F'}{\delta u'^4} = 6 e' \left(\frac{\delta^2 f'}{\delta u'^2}\right)^2 = 6 (v'^2 + w'^2)(-8 r^4 v'^2 w'^2)^2$$
$$- 384 r^8 v'^4 w'^4 (v'^2 + w'^2);$$
$$\frac{\delta^4 F'}{\delta u'^2 \delta t'^2} \quad 2 e' \frac{\delta^2 f'}{\delta u'^2} \cdot \frac{\delta^2 f'}{\delta t'^2} - 256 r^6 v'^2 w'^2 g'$$
$$- 2 (v'^2 + w'^2) \cdot 8 r^2 v'^2 w'^2 \cdot 8 r^4 v'^2 w'^2$$
$$- 256 r^6 v'^4 w'^4 (v'^2 + w'^2) = - 128 r^6 v'^4 w'^4 (v'^2 + w'^2);$$
$$\frac{\delta^4 F'}{\delta t'^4} = 6 e' \left(\frac{\delta^2 f'}{\delta t'^2}\right)^2 = - 384 r^4 v'^4 w'^4 (v'^2 + w'^2).$$

Setzen wir die hier gefundenen Werte in den Ausdruck

$$\Delta F'^{IV} - \left(u \frac{\delta F'}{\delta u'} + v \frac{\delta F'}{\delta v'} + w \frac{\delta F'}{\delta w'} + t \frac{\delta F'}{\delta t'}\right)^4 = 0$$

ein, so ergibt sich:

$$u^4 \cdot 384 r^8 v'^4 w'^4 (v'^2 + w'^2) - 6 u^2 t^2 \cdot 128 r^6 u'^4 v'^4 (v'^2 + w'^2)$$
$$+ t^4 \cdot 384 r^4 v'^4 w'^4 (v'^2 + w'^2) = 0;$$

oder: $r^4 u^4 - 2 r^2 u^2 t^2 + t^4 = 0$, welcher Ausdruck sich ergibt, wenn wir mit $384 r^4 v'^4 w'^4 (v'^2 + w'^2)$ dividieren.

Schreiben wir nun noch für $t = 1$, so ergibt sich nach Zusammenfassung die einfache Gleichung: $(r^2 u^2 - 1)^2 = 0$.

Daraus folgt für u der Wert $u = \pm \frac{1}{r}$.

Damit haben wir das interessante Resultat gewonnen, daß jede Ebene des Büschels $u' = 0$ und $t' = 0$ die Fläche in zwei doppelt zu zählenden Punkten berührt, denn Δ^{IV} ist für $u' = 0$, $t' = 0$ eine zerfallende Fläche vierter Klasse. Das Produkt des Zerfallens ist eine doppelt zu zählende Fläche zweiter Klasse, welche ihrerseits wieder in die beiden Punkte $u = +\frac{1}{r}$ und $u = -\frac{1}{r}$ zerfällt.

Die Enveloppe des Ebenenbüschels sind zwei Punkte auf der Achse des Büschels in der Entfernung $\pm r$ vom Koordinatenanfangspunkte.

Analoge Resultate ergeben sich für die Ebenenbüschel mit der Y- und Z-Achse als Achse.

Es existieren also unter den Erzeugenden der Fläche drei Ebenenbüschel. Jede der Ebenen dieser Büschel ist singulär. Da jede dieser Ebenen die Fläche in zwei Pnnkten berührt, können wir sie wohl auch als bipunktuell bezeichnen. Es darf aber nicht übersehen werden, daß die Singularität hier von höherer Ordnung ist als bei den Tangentenebenen des vorigen Paragraphen. Es möge der Hinweis genügen, daß an diesen Stellen — den Berührungspunkten obiger Ebenen mit der Fläche — acht Mäntel der Fläche zusammentreffen.

§ 4. Die Tangentenebenen parallel zu den Winkelhalbierenden in den Koordinatenebenen.

Um bei den folgenden Untersuchungen leichter zum Ziele zu gelangen, ist eine Transformation der Flächengleichung notwendig. Aus der Symmetrie der Fläche folgt, daß auch im weiteren nur eine einzige Untersuchung notwendig ist. Die übrigen Resultate ergeben sich durch entsprechende zyklische Vertauschung. Deshalb mögen die Untersuchungen nur auf die (XY)-Ebene ausgedehnt werden.

Wir gehen von der ursprünglichen Flächengleichung

$$(u^2+v^2+w^2)\,[(u^2+v^2+w^2) - 4r^2\,(u^2\,v^2+u^2\,w^2+v^2\,w^2) - 4r^4\,u^2\,v^2\,w^2]^2 - 64\,r^6\,u^2\,v^2\,w^2\,(u^2+v^2)\,(u^2+w^2)\,(v^2+w^2)=0$$

aus und transformieren diese Gleichung auf die Winkelhalbierenden der (XY)-Ebene, d. h. wir drehen das Koordinatensystem um die Z-Achse um einen Winkel von 45^0.

Die Transformationsformeln lauten:

$$u=\frac{u'-v'}{\sqrt{2}},\ v=\frac{u'+v'}{\sqrt{2}},\ w=w'.$$

Die Flächengleichung erhält dann folgende Form:

$$(u'^2+v'^2+w'^2)\,[(u'^2+v'^2+w'^2) - r^2\,\{(u'^2-v'^2)^2+4w'^2\cdot(u'^2+v'^2)\} - r^4\,(u'^2+v'^2)^2\,w'^2]^2 - 4r^6\,(u'^2+v'^2)^2\,w'^2\,(u'^2+v'^2)\,[(u'^2+v'^2+2w'^2)^2 - 4u'^2\,v'^2]=0.$$

Bevor wir aber die Singularität der Tangentenebenen parallel zu den Winkelhalbierenden untersuchen, müssen wir erst die Enveloppe dieser Ebenen etwas eingehender betrachten. Wir erhalten die Gleichung der Enveloppe der Ebenen parallel zur Y′-Achse — diese allein wollen wir behandeln — wenn wir $v' = 0$ setzen. Führen wir dies aus, setzen wir also $v' = 0$, so erhalten wir als Enveloppe einen Cylinder. Auf die Gleichung dieses Cylinders wollen wir nun weiter eingehen. Es zeigt sich nämlich, daß dieser Cylinder in zwei Cylinder zerfällt. Um diese Tatsache nachweisen zu können, müssen wir die irrationale Form der Flächengleichung zu Hilfe nehmen. Transformieren wir nämlich die irrationale Form der Flächengleichung auf die Winkelhalbierenden mit Hilfe obiger Transformationsformeln, setzen zuerst $v'=0$ und machen dann erst rational, so erhalten wir als Enveloppe einen Zylinder sechster Klasse. Die Gleichung des Cylinders erscheint in folgender Form:

$$(u'^2 + w'^2)\,(r^2\,u'^2 - 1)^2 - 4r^2\,u'^2\,w'^2 = 0.$$

Dagegen lautet die Gleichung des Cylinders, welcher sich aus der Hauptgleichung für $v' = 0$ ergibt:

$$(u'^2 + w'^2)\,[(u'^2 + w'^2) - r^2\,(u'^4 + 4\,u'^2\,w'^2) - r^4\,u'^4\,w'^2]^2 - 4r^6\,u'^6\,w'^6\,(u'^2 + z'^2)^2 = 0.$$

Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß erstere Gleichung ein Bestandteil der letzteren sein muß. Dividieren wir die beiden Gleichungen durcheinander, so erhalten wir das folgende Resultat:

$$\{(u'^2 + w'^2)\,[(u'^2 + w'^2) - r^2(u'^4 + 4\,u'^2\,w'^2) - r^4\,u'^4\,w'^2]^2 - 4r^6\,u'^6\,w'^2\,(u'^2 + w'^2)^2\} : \{(u'^2 + w'^2)\,(r^2\,u'^2 - 1)^2 - 4\,r^2\,u'^2\,w'^2\} = (u'^2 + w'^2 - r^2\,u'^2\,w'^2)^2 .$$

Die Enveloppe besteht also aus zwei Cylindern. Ihre Gleichungen sind:

$$(u'^2 + w'^2)\;(r^2\,u'^2 - 1)^2 - 4\,r^2\,u'^2\,w'^2 = 0,$$
$$\text{und } u'^2 + w'^2 - r^2\,u'^2\,w'^2 = 0 .$$

Der Profilschnitt des ersten Cylinders wird im II. Teil unter den Curven $\varphi = 45^0$ untersucht werden; der des zweiten Cylinders ist nach früherem leicht erkennbar als eine Astroide

deren Gleichung $x'^{2/3} + z'^{2/3} = r^{2/3}$ lautet. Nachdem wir nun gefunden, daß die Enveloppe der Tangentenebenen parallel zur Y'-Achse aus zwei Cylindern besteht, wollen wir die Tangentenebenen der Fläche, welche diesen Cylinderen angehören, untersuchen und zwar zunächst die Ebenen der Enveloppe $(u'^2 + w'^2 - r^2 u'^2 w'^2 - 0)$ und dann die der Enveloppe $(u'^2 + w'^2)\ (r^2 u'^2 - 1)^2 - 4 r^2 u'^2 w'^2 = 0$.

•

a. Die Tangentenebenen der Enveloppe $u'^2 + w'^2 - r^2 u'^2 w'^2 - 0$ ·

Wir verfahren wieder wie in § 3. Aus den Ebenen der Enveloppe greifen wir eine Ebene $(u'_0, 0, w'_0)$ heraus und untersuchen die Gleichung ihres Berührungspunktes mit Hilfe der ersten Derivierten. Für die Koordinaten (u'_0, v'_0, w'_0) dieser Ebene gestaltet sich die homogene Flächengleichung wie folgt:

$$F'_0 = (u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + w'_0{}^2)\ [(u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + w'_0{}^2)\ t'_0{}^4 - r^2 \{(u'_0{}^2 - v'_0{}^2)^2 + 4 w'_0{}^2 (u'_0{}^2 + v'_0{}^2)\}\ t'_0{}^2 - r^4 (u'_0{}^2 - v'_0{}^2)^2 w'_0{}^2]^2 - 4 r^6 (u'_0{}^2 - v'_0{}^2)^2 w'_0{}^2 t'_0{}^2 (u'_0{}^2 + v'_0{}^2) \{(u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + 2 w'_0{}^2)^2 - 4 u'_0{}^2 v'_0{}^2\} = 0 \cdot$$

Wir führen wieder eine abgekürzte Schreibweise ein und zwar setzen wir für

$$(u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + w'_0{}^2) = e'_0,$$

für $[(u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + w'_0{}^2)\ t'_0{}^4 - r^2 \{(u'_0{}^2 - v'_0{}^2)^2 + 4 w'_0{}^2 (u'_0{}^2 + v'_0{}^2)\}\ t'_0{}^2 - r^4 (u'_0{}^2 - v'_0{}^2)^2 w'_0{}^2]^2 = f'_0{}^2$,

für $\{(u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + 2 w'_0{}^2)^2 - 4 u'_0{}^2 v'_0{}^2\} = g'_0$;

Für F'_0 erhalten wir sodann:

$$F'_0 \equiv e'_0 f'_0{}^2 - 4 r^6 (u'_0{}^2 - v'_0{}^2)^2 w'_0{}^2 t'_0{}^2 (u'_0{}^2 + v'_0{}^2) g'_0 = 0.$$

Nun bilden wir uns die ersten Derivierten nach u'_0, v'_0, w'_0, t'_0 · Dieselben lauten:

$$\frac{\delta F'_0}{\delta u'_0} = 2 u'_0 f'_0{}^2 + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} - 16 r^6 u'_0 (u'_0{}^4 - v'_0{}^4) \cdot w'_0{}^2 t'_0{}^2 g'_0 - 8 r^6 u'_0 w'_0{}^2 t'_0{}^2 (u'_0{}^2 - v'_0{}^2)^2 g'_0 - 4 r^6 (u'_0{}^2 - v'_0{}^2)^2 w'_0{}^2 t'_0{}^2 (u'_0{}^2 + v'_0{}^2) \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0};$$

$$\frac{\delta F'_0}{\delta v'_0} = 2v'_0 f'^2_0 + 2e'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta v'_0} + 16 r^6 v'_0 w'^2_0 t'^2_0 (u'^4_0 - v'^4_0) g'_0 - 8 r^6 v'_0 w'^2_0 (u'^2_0 - v'^2_0)^2 t'_0 g'_0 - 4 r^6 (u'^2_0 - v'^2_0)^2 w'^2_0 t'^2_0 (u'^2_0 + v'^2_0) \frac{\delta g'_0}{\delta v'_0};$$

$$\frac{\delta F'_0}{\delta w'_0} = 2w'_0 f'^2_0 + 2e'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} - 8 r^6 w'_0 t'^2_0 (u'^2_0 - v'^2_0)^2 (u'^2_0 + v'^2_0) g'_0 - 4 r^6 (u'^2_0 - v'^2_0)^2 w'^2_0 t'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta w'_0};$$

$$\frac{\delta F'_0}{\delta t'_0} = 2e'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} - 8 r^6 (u'^2_0 - v'^2_0)^2 w'^2_0 t'_0 (u'^2_0 + v'^2_0) g'_0 \cdot$$

Setzen wir $v'_0 = 0$ und beachten noch, daß $u'^2_0 + w'^2_0 = 4 r^2 u'^2_0 w'^2_0$, so ergibt sich nach einer leichten Umformung, daß sämtliche Derivierten verschwinden, d. h., daß

$$\frac{\delta F'_0}{\delta u'_0} = 0, \frac{\delta F'_0}{\delta v'_0} = 0, \frac{\delta F'_0}{\delta w'_0} = 0, \frac{\delta F'_0}{\delta t'_0} = 0 \text{ werden.}$$

Für $\frac{\delta F'_0}{\delta t'_0}$ werde die Rechnung durchgeführt, da gerade dieses Glied von besonderer Wichtigkeit in der ganzen Untersuchung ist. Ausführlich geschrieben hat $\frac{\delta F'_0}{\delta t'_0}$ die folgende Form, wenn wir gleichzeitig $t'_0 = 1$ setzen:

$$\frac{\delta F'_0}{\delta t'_0} = 2 (u'^2_0 + w'^2_0) [(u'^2_0 + w'^2_0) - r^2 (u'^4_0 + 4u'^2_0 w'^2_0) - r^4 u'^4_0 w'^2_0] \cdot [4 (u'^2_0 + w'^2_0) - 2 r^2 (u'^4_0 + 4 u'^2_0 w'^2_0)] - 8 r^6 u'^6_0 w'^2_0 (u'^2_0 + 2 w'^2_0)^2.$$

Substituieren wir $u'^2_0 + w'^2_0 = r^2 u'^2_0 w'^2_0$, so erhält der Ausdruck die folgende Form:

$$\frac{\delta F'_0}{\delta t'_0} = 2r^2 u'^2_0 w'^2_0 [2 r^2 v'^2_0 w'^2_0 + 2 r^4 u'^4_0 w'^2_0]^2 - 8 r^6 u'^6_0 w'^2_0 (r^2 u'^2_0 w'^2_0 + w'^2_0)^2 = 8 r^6 u'^6_0 w'^6_0 (r^2 u'^2_0 + 1)^2 - 8 r^6 u'^6_0 w'^6_0 (r^2 u'^2_0 + 1)^2 = 0.$$

Ebenso lässt es sich für die übrigen Derivierten nachweisen.

Wir erhalten nun als erstes Resultat, daß die Ebenen der Enveloppe $u'^2_0 + w'^2_0 - r^2 u'^2_0 w'^2_0 = 0$ singuläre Tangentenebenen der Fläche sind. Zur Feststellung der Art der Singularität müssen wir nun auch die zweiten Derivierten untersuchen.

Bilden wir die zweiten Derivierten und setzen wir gleichzeitig $v'_0 = 0$ und $t'_0 = 1$.

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'^2_0} = 2 f'^2_0 + 8 u'^2_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} + 2 e'_0 \left(\frac{\delta f'_0}{\delta u'_0}\right)^2 + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'^2_0}$$

$$- 120 r^6 u'^4_0 w'^2_0 g'_0 - 48 r^6 u'^5_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta u'^2_0};$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'_0 \delta v'_0} = 0; \quad \frac{\delta^2 F'_0}{\delta v'_0 \delta w'_0} = 0; \quad \frac{\delta^2 F'_0}{\delta v'_0 \delta t'_0} = 0.$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta v'^2_0} = 2 f'^2_0 + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta v'^2_0} + 8 r^6 w'^2_0 u'^4_0 g'_0$$

$$- 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta v'^2_0};$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0} = - 4 w'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} + 4 u'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} + 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0}$$

$$+ 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0} - 48 r^6 u'^5_0 w'_0 g'_0 - 8 r^6 u'^6_0 w'_0 \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0}$$

$$- 24 r^6 u'^5_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta w'_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0};$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta w'^2_0} = 2 f'^2_0 + 8 w'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} + 2 e'_0 \left(\frac{\delta f'_0}{\delta w'_0}\right)^2 + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta w'^2_0}$$

$$- 8 r^6 u'^6_0 g'_0 - 16 r^6 u'^6_0 w'_0 \frac{\delta g'_0}{\delta w'_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta w'^2_0};$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'_0 \delta t'_0} = 4 u'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} + 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta t'_0}$$

$$- 48 r^6 u'^5_0 w'^2_0 g'_0 - 8 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0};$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta w'_0 \delta t'_0} = 4 w'_0 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} + 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} \cdot \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta w'_0 \delta t'_0}$$

$$- 16 r^6 u'^6_0 w'^6_0 g'_0 - 8 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta w'_0};$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta t'^2_0} = 2 e'_0 \left(\frac{\delta f'_0}{\delta t'_0}\right)^2 + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta t'^2_0} - 8 r^6 u'^6_0 w'^6_0 g'_0.$$

Damit wir die Gleichung für die zweiten Derivierten

$$\left(u^2 \frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'^2_0} + 2 u v \frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'_0 \delta v'_0} + v^2 \frac{\delta^2 F'_0}{\delta v'^2_0} + 2 u w \frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0}\right.$$

$$+ 2 v w \frac{\delta^2 F'_0}{\delta v'_0 \delta w'_0} + w^2 \frac{\delta^2 F'_0}{\delta w'^2_0} + 2 u t \frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'_0 \delta t'_0} + 2 v t \frac{\delta^2 F'_0}{\delta v'_0 \delta t'_0}$$

$$+ 2\,w\,t\frac{\delta^2 F'_0}{\delta w'_0 \delta t'_0} + t^2 \frac{\delta^2 F'}{\delta t'^2_0}\Big) = 0.$$

diskutieren können, müssen wir die Werte der zweiten Derivierten berechnen und die dafür gefundenen Werte in obige Gleichung einsetzen. Unter fortwährender Berücksichtigung der Relation $u'^2_0 + w'^2_0 - r^2 u'^2_0 w'^2_0 = 0$ erhalten wir für die zweiten Derivierten folgende Werte:

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'^2_0} = 2 f'_0 [2 r^2 u'^2_0 w'^2_0 + 2 r^4 u'^4_0 w'^2_0 - 8 u'^2_0 - 16 r^4 u'^4_0 w'^2_0$$
$$+ 16 r^6 u'^2_0 w'^2_0 + 16 r^4 u'^4_0 w'^2_0 - 2 r^2 u'^2_0 w'^2_0 + 8 r^6 u'^4_0 w'^4_0$$
$$+ 4 r^4 u'^4_0 w'^2_0 + 12 r^6 u'^4_0 w'^4_0] + 8 r^2 u'^4_0 w'^2_0 [1 - 4 r^4 u'^2_0 w'^2_0$$
$$- 2 r^2 w'^2_0]^2 - 120 r^6 u'^4_0 w'^2_0 (r^2 u'^2_0 w'^2_0 + w'^2_0)^2 - 48 r^6 u'^6_0 w'^2_0$$
$$\cdot 4 (r^2 u'^2_0 w'^2_0 + w'^2_0) - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 [4 (r^2 u'^2_0 w'^2_0 + w'^2_0)$$
$$+ 8 u'^2_0]$$
$$= 8 r^2 u'^4_0 w'^2_0 \{(r^2 u'^2_0 + 1)(8 r^2 w'^2_0 - 5 r^4 u'^2_0 w'^2_0$$
$$- 15 r^4 w'^4_0 - 5 r^6 u'^2_0 w'^4_0 - 4) + [1 - 8 r^4 u'^2_0 w'^2_0 + 16 r^8 u'^4_0 w'^4_0$$
$$- 4 r^2 w'^2_0 + 16 r^6 u'^2_0 w'^4_0 + 4 r^4 w'^4_0 - 4 r^6 u'^4_0 w'^2_0 - 2 r^4 u'^4_0]\};$$

Eine leichte Umformung zeigt, daß sich aus der letzten Klammer der Faktor $(r^2 u'^2_0 + 1)$ heraussetzen läßt. Wir erhalten sodann, wenn wir noch zusammen fassen:

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta u'^2_0} = 8 r^2 u'^4_0 w'^2_0 (r^2 u'^2_0 + 1)(4 r^2 w'^2_0 - 3 + 11 r^6 u'^2_0 w'^4_0$$
$$- 13 r^4 w'^4_0 - 10 r^4 u'^2_0 w'^2_0 - r^2 u'^2)$$
$$= 8 r^2 u'^4_0 w'^2_0 (r^2 u'^2_0 + 1)(5 r^2 w'^2_0 - 2 r^4 w'^4_0 - 3)$$
$$= 8 r^2 u'^4_0 w'^2_0 (r^2 u'^2_0 + 1)(2 r^2 w'^2_0 - 3)(1 - r^2 w'^2_0).$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta v'^2_0} = 4 r^2 u'^2_0 w'^2_0 \{(r^2 u'^2_0 + 1)(2 r^2 u'^2_0 w'^2_0 + 2 r^4 u'^4_0 w'^2_0$$
$$- r^2 u'^2_0 w'^2_0 [2 + 4 r^2 u'^2_0 - 8 r^2 w'^2_0 + 4 r^4 u'^2_0 w'^2_0])$$
$$+ 2 r^4 u'^2_0 w'^4_0 (r^2 u'^2_0 + 1)^2 - 4 r^4 u'^4_0 (2 w'^2_0 - u'^2_0)\}$$
$$= 8 r^4 u'^4_0 w'^2_0 \{(r^2 u'^2_0 + 1)(5 r^2 w'^2_0 - r^2 u'^2_0 w'^2_0$$
$$- r^4 u'^2_0 w'^2_0) - 2 r^2 u'^2_0 (2 w'^2_0 - u'^2_0)\}$$
$$= 16 r^6 u'^4_0 w'^2_0 (2 w'^2_0 - u'^2_0)(r^2 u'^2_0 w'^2_0 + w'^2_0 - u'^2_0)$$
$$= 32 r^6 u'^4_0 w'^4_0 (2 w'^2_0 - u'^2_0)$$
$$= - 32 r^6 u'^4_0 w'^6_0 (r^2 u'^2_0 - 3).$$

$$\frac{\delta^2 F'_0}{\delta u_0 \delta w'_0} = 2 f'_0 \{- 2 w'_0 (2 u'_0 - 8 r^4 u'^3_0 w'^2_0 - 4 r^2 u'_0 w'^2_0)$$

$$-2u'_0(2w'_0-8r^2w'_0u'^2_0-2r^4u'^4_0w'_0)-r^2u'^2_0w'^2_0$$
$$(-16r^2u'_0w'_0-8r^4u'^3_0w'_0)\Big]+2r^2u'^2_0w'^2_0(2u'_0$$
$$-8r^4u'^3_0w'^2_0-4r^2u'_0w'^2_0)\cdot(2w'_0-8r^2w'_0u'^2_0$$
$$-2r^4u'^4_0w'_0)-48r^6u'^5_0w'^5_0\cdot(r^2u'^2_0+1)^2$$
$$-32r^6u'^7_0w'^3_0(r^2u'^2_0+1)-192r^6u'^5_0w'^5_0(r^2u'^2_0$$
$$+1)-64r^6u'^7_0w'^3_0$$
$$=8r^2u'^3_0w'^3_0\Big[(r^2u'^2_0+1)(-4-10r^4u'^2_0w'^2_0$$
$$-2r^6u'^4_0w'^2_0-2r^4u'^4_0+4r^2u'^2_0)+[1-4r^4u'^2_0w'^2_0$$
$$-2r^2w'^2_0-4r^2u'^2_0+16r^6u'^4_0w'^2_0+8r^4u'^2_0w'^2_0$$
$$-r^4u'^4_0+4r^8u'^6_0w'^2_0+2r^6u'^4_0w'^2_0-8r^4u'^4_0]\Big].$$

Durch eine ähnliche Umformung wie oben läßt sich wieder der Faktor $(r^2u'^2_0+1)$ ausscheiden. Wir erhalten sodann:

$$\frac{\delta^2F'_0}{\delta u'_0\delta w'_0}=8r^2u'^3_0w'^3_0(r^2u'^2_0+1)(-3+2r^6u'^4_0w'^2_0$$
$$-2r^4u'^4_0-r^2u'^2_0-2r^2w'^2_0)$$
$$=8r^2u'^3_0w'^3_0(r^2u'^2_0+1)(r^2u'^2_0-3).$$

$$\frac{\delta^2F'_0}{\delta w'^2_0}=2f'_0[2r^2u'^2_0w'^2_0+2r^4u'^4_0w'^2_0-8w'^2_0+32r^2w'^2_0u'^2_0$$
$$+8r^4u'^4_0w'^2_0-2r^2u'^2_0w'^2_0+2r^6u'^6_0w'^2_0]$$
$$+8r^2u'^2_0w'^4_0(1-4r^2u'^2_0-r^4u'^4_0)^2-8r^6u'^6_0w'^4_0\cdot$$
$$(r^2u'^2_0+1)-128r^6u'^6_0w'^4_0(r'^2u'^2_0+1)^2-$$
$$32r^6u'^6_0w'^4_0(r^2u'^2_0+1)-128r^6u'^6_0w'^4_0$$
$$=8r^2u'^2_0w'^4_0\Big[(r^2u'^2_0+1)(9r^4u'^4_0+16r^2u'^2_0-4$$
$$-r^4u'^4_0-2r^4u'^4_0)+(1-8r^2u'^2_0-2r^4u'^4_0$$
$$+8r^6u'^6_0+r^8u'^8_0)\Big].$$

Aus der Klammer $(1-8r^2u'^2_0---)$ läßt sich der Faktor $(r^2u'^2_0+1)$ heraussetzen, wenn etwas umgeformt wird.

Es wird dann:

$$\frac{\delta^2F'_0}{\delta w'^2}=8r^2u'^2_0w'^4_0(r^2u'^2_0+1)(-5r^4u'^4_0-3+7r^2u'^2_0$$
$$+r^2u'^6_0)$$
$$=8r^2u'^2_0w'^4_0(r^2u'^2_0+1)(r^2u'^2_0-3)(r^2u'^2_0-1)^2.$$

$$\frac{\delta^2F'_0}{\delta u'_0\delta t'_0}=2f'_0[2u'_0(2r^2u'^2_0w'^2_0+2r^4u'^4_0w'^2_0)-r^2u'^2_0w'^2_0$$
$$\Big[2u'^2_0-r^2u'^2_0(4r^2u'^2_0w'^2_0+4w'^2_0)-4r^4u'^3_0w'^2_0\Big]$$
$$-r^2u'^2_0w'^2_0\Big[8u'_0-2r^2u'_0(4r^2u'^2_0w'^2_0+4w'^2_0)\Big]]$$
$$-48r^6u'^5_0w'^6_0(r^2u'^2_0+1)^2-32r^6u'^7_0w'^4_0(r^2u'^2_0+1)$$

$$8r^4u'^5_0w'^4_0(r^2u'^2_0+1)(-3+2r^4u'^2_0w'^2_0-2r^2u'^2_0)$$
$$=8r^4u'^5_0w'^4_0(r^2u'^2_0+1)(2r^2w'^2_0-3).$$

$$\frac{\delta^2F'_0}{\delta\overline{w'_0}\,\delta t'_0}=-2f'_0[2w'_0(2r^2u'^2_0w'^2_0+2r^4u'^4_0w'^2_0)-r^2u'^2_0w'^2_0\cdot$$
$$(2w'_0-8r^2u'^2_0w'_0-2r^4u'^4_0w'_0)-r^2u'^2_0w'^2_0(8w'_0$$
$$-16r^2u'^2_0w'^2_0)]-16r^6u'^6_0w'^5_0(r^2u'^2_0+1)^2$$
$$-64r^6u'^6_0w'^5_0(r^2u'^2_0+1)$$
$$=8r^4u'^4_0w'^5_0(r^2u'^2_0+1)(-3+4r^2u'^2_0-r^4u'^4_0)$$
$$=8r^4u'^4_0w'^5_0(r^2u'^2_0+1)(r^2u'^2_0-3)(1-r^2u'^2_0).$$

$$\frac{\delta^2F'_0}{\delta t'^2_0}=2f'_0[r^2u'^2_0w'^2_0(2r^2u'^2_0w'^2_0+2r^4u'^4_0w'^2_0)$$
$$-2r^2u'^2_0w'^2_0(6r^2u'^2_0w'^2_0-2r^4u'^4_0w'^2_0)]-$$
$$8r^6u'^6_0w'^6_0(r^2u'^2_0+1)^2$$
$$=8r^6u'^6_0w'^6_0(r^2u'^2_0+1)(r^2u'^2_0-3).$$

Setzen wir nun die für die zweiten Derivierten gefundenen Werte in ihre Gleichung ein, so erhalten wir die folgende Fläche zweiter Klasse:

$$u'^2[8r^2u'^4_0w'^2_0(r^2u'^2_0+1)(2r^2w'^2_0-3)(1-r^2w'^2_0)]$$
$$-v'^2[32r^6u'^4_0w'^6_0(r^2u'^2_0-3)]+2u'w'[8r^2u'^3_0w'^3_0(r^2u'^2_0$$
$$+1)(r^2u'^2_0-3)]+w'^2[8r^2u'^2_0w'^2_0(r^2u'^2_0+1)(r^2u'^2_0-1)^2\cdot$$
$$(r^2u'^2_0-3)]+2u'[8r^4u'^5_0w'^4_0(r^2u'^2_0+1)(2r^2w'^2_0-3)]$$
$$+2w'[8r^4u'^4_0w'^5_0(r^2u'^2_0+1)\cdot(r^2u'^2_0-3)(1-r^2u'^2_0)]$$
$$+8r^6u'^6_0w'^6_0(r^2u'^2_0+1)(r^2u'^2_0-3)=0.$$

Es ergibt sich die Frage, ob die durch diese Gleichung dargestellte Fläche zerfällt oder nicht. Es läßt sich schon von vornherein sagen, daß sie zerfallen muß. Sie wird zerfallen, wenn $\Delta=0$ ist. Nach Division mit $8r^2u'^2_0w'^2_0$ und nach Ausscheidung einiger nicht wesentlicher Faktoren läßt sich Δ in der folgenden Form anschreiben:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-r^2w'^2_0(2r^2w'^2_0-3) & r^2u'^2_0(r^2u'^2_0-3) & r^2w'^2_0(r^2u'^2_0-3)\\ 1 & r^2u'^2_0-1)^2 & (1-r^2u'^2_0)\\ (2r^2w'^2_0-3) & r^2u'^2_0-3)(1-r^2u'^2_0) & (r^2u'^2_0-3)\end{vmatrix}$$
$$\cdot-2r^2u'^2_0(r^2u'^2_0-3)[-(r^2u'^2_0-3)+(2r^2u'^2_0-3$$
$$-2r^4u'^2_0w'^2_0+3r^2u'^2_0)]$$
$$=-4r^4u'^2_0(r^2u'^2_0-3)(u'^2_0+w'^2_0-r^2u'^2_0w'^2_0)=0$$

da der Faktor $(u'^2_0+w'^2_0-r^2u'^2_0w'^2_0)=0$ ist; d. h. die Fläche zerfällt. Aus dem Verschwinden von Δ ergibt sich,

daß sich die Gleichung der Fläche in ein Produkt von zwei Faktoren zerlegen lassen muß. Zu diesem Zwecke formen wir die Gleichung etwas um und erhalten:

$$u'^2\left[u'_0{}^2\frac{(1-2\,r^2\,w'_0{}^2)\;\;(1-r^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2\;+\;1}\right]-v'^2\left[\frac{4\,r^4\,u'_0{}^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2+1}\right]$$
$$+\,2\,u'\,w'\,(u'_0\,w'_0)+w'^2\,[w'_0{}^2\,(r^2\,u'_0{}^2-1)]+2\,u'\,[r^2\,u'_0{}^3\,w'_0{}^2\cdot$$
$$\frac{1-2\,r^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2+1}\Big]+2\,w'\,[r^2\,u'_0{}^2\,w'_0{}^3\,(1-r^2\,u'_0{}^2)]+r^4\,u'_0{}^4\,w'_0{}^4=0.$$

Multiplizieren wir Zähler und Nenner des Koeffizienten von u'^2 mit $(r^2\,u'_0{}^2+1)$, so geht dieser Bruch in das folgende Quadrat über: $\left(\frac{1-2\,r^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2+1}\right)^2$; beachten wir weiter, daß der Ausdruck $\frac{(1-2\,r^2\,w'_0{}^2)\;(1-r^2\,u'_0{}^2)}{r^2\,u'_0{}^2+1}$ gleich 1 ist, so erhält obige Gleichung folgende Form:

$$-v'^2\left(\frac{4\,r^4\,u'_0{}^2\,w'_0{}^4}{r^2\,u'_0{}^2+1}\right)+\left[u'^2\left[u'_0{}^2\left(\frac{1-2\,r^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2+1}\right)^2\right]+2\,u'\,w'\cdot\right.$$
$$\left(u'_0\,w'_0\,\frac{(1-2\,r^2\,w'_0{}^2)\;(1-r^2\,u'_0{}^2)}{r^2\,u'_0{}^2+1}\right)+w'^2\left(w'_0{}^2\,(1-r^2\,u'_0{}^2)^2\right)$$
$$+\,2\,u'\left(r^2\,u'_0{}^3\,w'_0{}^2\,\frac{1-2\,r^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2+1}\right)+2\,w'\left(r^2\,u'_0{}^2\,w'_0{}^2\,(1-r^2\,u'_0{}^2)\right)$$
$$\left.+\,r^4\,u'_0{}^4\,w'_0{}^4\right]=0.$$

Daraus erhalten wir sofort die Differenz zweier Quadrate, nämlich:

$$-v^2\left(\frac{4\,r^4\,u'_0{}^2\,w'_0{}^4}{r^2\,u'_0{}^2+1}\right)+\left(u'\,u'_0\,\frac{1-2\,r^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2+1}+w\,w'_0\,(1-r^2\,u'_0{}^2)\right.$$
$$\left.+\,r^2\,u'_0{}^2\,w'_0{}^2\right)^2=0.$$

Die Ebene $(u'_0,\,0,\,w'_0)$ ist also ebenfalls eine bipunktuelle Tangentialebene der Fläche. Die Gleichungen der Berührungspunkte lauten:

$$\left(u'\cdot\frac{1-r^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0\,w'_0{}^2}+w'\,\frac{1-r^2\,u'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2\,w'_0}+1\right)+v'\,\frac{2}{u'_0\sqrt{r^2\,u'_0{}^2+1}}=0,$$
$$\left(u'\,\frac{1-r^2\,w'_0{}^2}{r^2\,u'_0\,w'_0{}^2}+w'\,\frac{1-r^2\,u'_0{}^2}{r^2\,u'_0{}^2\,w'_0}+1\right)-v'\,\frac{2}{u'_0\sqrt{r^2\,u'_0{}^2+1}}=0,$$

oder in Punktkoordinaten:

$$x' = \frac{1 - r^2 w'^2_0}{r^2 u'_0 w'^2_0},$$

$$y' = \frac{\pm 2}{u'_0 \sqrt{r^2 u'^2_0 + 1}},$$

$$z' = \frac{1 - r^2 u'^2_0}{r^2 u'^2_0 w'_0}.$$

Wir erkennen nun aus den obigen Untersuchungen, daß der Cylinder $u'^2 + w'^2 - r^2 u'^2 w'^2 = 0$ die Enveloppe von lauter bipunktuellen Tangentialebenen der Fläche ist. Desgleichen ergibt sich eine solche Enveloppe aus Gründen der Symmetrie aus den Ebenen parallel zur X'-Achse für $u' = 0$. Ebenso gelten die Untersuchungen für die (X Z)- und (Y Z)-Ebene, deren Resultate sich durch zyklische Vertauschung ergeben. Wir erhalten also insgesamt sechs Enveloppen bipunktueller Tangentialebenen als Resultat obiger Untersuchungen.

b. Die Tangentenebenen der Enveloppe

$$(u'^2 + w'^2)(r^2 u'^2 - 1)^2 - 4 r^2 u'^2 w'^2 = 0.$$

Verfahren wir hier ebenso wie unter a), so ergibt sich, daß außer $\frac{\delta F'_0}{\delta v'_0}$ keine der ersten Derivierten verschwindet. Die Ebenen dieser Enveloppe sind also gewöhnliche Tangentenebenen der Fläche.

§ 5. Die Tangentenebenen

$$|u| = |v| = |w| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2r}\right|.$$

In § 4 haben wir die ersten und zweiten Derivierten gebildet und erkannt, daß für $v'_0 = 0$ sämtliche ersten Derivierten verschwanden, nicht aber alle zweiten. Setzen wir nun noch für $u'_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{r}$, $w'_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2r}$, was den Forderungen $|u| = |v| = |w| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2r}\right|$ bezogen auf die Hauptachsen entspricht, so verschwinden auch die sämtlichen zweiten Deri-

vierten. Um die Art der Singularität dieser Ebenen zu erhalten, müssen wir nun zur Bildung der dritten Derivierten übergehen und dieselben untersuchen. Das Koordinatensystem ist dasselbe wie in § 4 und wir können deshalb die dritten Derivierten im Anschlusse an die dort gefundenen Ausdrücke für die zweiten Derivierten ableiten. Dieselben sind:

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'^3_0} = 12 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} + 12\left(\frac{\delta f'_0}{\delta u'_0}\right)^2 + 12 u'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'^2_0} + 6 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'^2_0}$$
$$+ 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^3 f'_0}{\delta u'^3_0} - 480 r^6 u'^3_0 w'^2_0 g'_0 - 360 r^6 u'^4_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0}$$
$$- 72 r^6 u'^5_0 w'^2_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta u'^2_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta^3 g'_0}{\delta u'^3_0} \cdot$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'^2_0 \delta v'_0} = 0 \cdot$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'^2_0 \delta w'_0} = 4 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} + 8 u'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} \cdot \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} + 8 u'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0}$$
$$+ 4 w'_0 \left(\frac{\delta f'_0}{\delta u'_0}\right)^2 + 4 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0} + 4 w'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'^2_0}$$
$$+ 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^3 f'_0}{\delta u'^2_0 \delta w'_0} - 240 r^6 u'^4_0 w'_0 g'_0$$
$$- 120 r^6 u'^4_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta w'_0} - 96 r^6 u'^5_0 w'_0 \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0} - 48 r^6 u'^5_0 w'^2_0 \cdot$$
$$\frac{\delta^2 g'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0} - 8 r^6 u'^6_0 w'^6_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta u'^2_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta^3 g'_0}{\delta u'^2_0 \delta w'_0} \cdot$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'^2_0 \delta t'_0} = 4 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} + 8 u'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} \cdot \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} + 8 u'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta t'_0}$$
$$+ 4 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta t'_0} + 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^3 f'_0}{\delta u'^2_0 \delta t'_0}$$
$$+ 48 r^6 u'^5_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0} + 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta u'^2_0} \cdot$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta v'^3_0} = 0.$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'_0 \delta v'^2_0} = 4 f'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} + 4 u'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta v'^2_0} + 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta v'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \cdot$$
$$\frac{\delta^3 f'_0}{\delta u'_0 \delta v'^2_0} + 32 r^6 u'^3_0 w'^2_0 g'_0 + 8 r^6 u'^4_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0}$$
$$- 24 r^6 u'^5_0 w'^2_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta v'^2_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta^3 g'_0}{\delta u'_0 \delta v'^2_0} \cdot$$

$$\frac{\partial^3 F'_0}{\partial v'^2_0 \partial w'_0} = 4 f'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} + 4 w'_0 f'_0 \frac{\partial^2 f'_0}{\partial v'^2_0} + 2 e'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} \cdot \frac{\partial^2 f'_0}{\partial v'^2_0}$$
$$+ 2 e'_0 f'_0 \frac{\partial^3 f'_0}{\partial v'^2_0 \partial w'_0} + 16 r^6 u'^4_0 w'_0 g'_0 + 8 r^6 u'^4_0 w'^2_0 \cdot$$
$$\frac{\partial g'_0}{\partial w'_0} - 8 r^6 u'^6_0 w'_0 \frac{\partial^2 g'_0}{\partial v'^2_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\partial^3 g'_0}{\partial v'^2_0 \partial w'_0}.$$

$$\frac{\partial^3 F'_0}{\partial v'^2_0 \partial t'_0} = 4 f'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial t'_0} + 2 e'_0 \frac{\partial^2 f'_0}{\partial v'^2_0} \cdot \frac{\partial f'_0}{\partial t'_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\partial^3 f'_0}{\partial v'^2_0 \partial t'_0}$$
$$+ 2 \left[8 r^6 u'^4_0 w'^2_0 g'_0 - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\partial^2 g'_0}{\partial v'^2_0} \right].$$

$$\frac{\partial^3 F'_0}{\partial w'^3_0} = 12 f'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} + 12 w'_0 \left(\frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} \right)^2 + 6 e'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} \cdot \frac{\partial^2 f'_0}{\partial w'^2_0}$$
$$+ 12 w'_0 f'_0 \frac{\partial^2 f'_0}{\partial w'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\partial^3 f'_0}{\partial w'^3_0} - 24 r^6 u'^6_0 \frac{\partial g'_0}{\partial w'_0}$$
$$- 24 r^6 u'^6_0 w'_0 \frac{\partial^2 g'_0}{\partial w'^2_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\partial^3 g'_0}{\partial w'^3_0}.$$

$$\frac{\partial^3 F'_0}{\partial u'_0 \partial w'^2_0} = 4 f'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial u'_0} + 8 w'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial u'_0} \cdot \frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} + 8 w'_0 f'_0 \frac{\partial^2 f'_0}{\partial u'_0 \partial w'_0}$$
$$+ 4 u'_0 \left(\frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} \right)^2 + 4 e'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} \cdot \frac{\partial^2 f'_0}{\partial u'_0 \partial w'_0} + 4 u'_0 f'_0 \frac{\partial^2 f'_0}{\partial w'^2_0}$$
$$+ 2 e'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial u'_0} \cdot \frac{\partial^2 f'_0}{\partial w'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\partial^3 f'_0}{\partial u'_0 \partial w'^2_0} - 48 r^6 u'^5_0 g'_0$$
$$- 8 r^6 u'^6_0 \frac{\partial g'_0}{\partial u'_0} - 96 r^6 u'^5_0 w'_0 \frac{\partial g'_0}{\partial w'_0} - 16 r^6 u'^6_0 w'_0 \frac{\partial^2 g'_0}{\partial u'_0 \partial w'_0}$$
$$- 24 r^6 u'^5_0 w'^2_0 \frac{\partial^2 g'_0}{\partial w'^2_0} - 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\partial^3 g'_0}{\partial u'_0 \partial w'^2_0}.$$

$$\frac{\partial^3 F'_0}{\partial v' \partial w'^2_0} = 0.$$

$$\frac{\partial^3 F'_0}{\partial w'^2_0 \partial t'_0} = f'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial t'_0} + 8 w'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial t'_0} \cdot \frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} + 8 w'_0 f'_0 \frac{\partial^2 f'_0}{\partial w'_0 \partial t'_0}$$
$$+ 4 e'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial w'_0} \cdot \frac{\partial^2 f'_0}{\partial w'_0 \partial t'_0} + 2 e'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial t'_0} \cdot \frac{\partial^2 f'_0}{\partial w'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \cdot$$
$$\frac{\partial^3 f'_0}{\partial w'^2_0 \partial t'_0} - 2 \left[8 r^6 u'^6_0 g'_0 + 16 r^6 u'^6_0 w'_0 \frac{\partial g'_0}{\partial w'_0} + \right.$$
$$\left. 4 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\partial^2 g'_0}{\partial w'^2_0} \right].$$

$$\frac{\partial^3 F'_0}{\partial t'^3_0} = 6 e'_0 \frac{\partial f'_0}{\partial t'_0} \cdot \frac{\partial^2 f'_0}{\partial t'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\partial^3 f'_0}{\partial t'^3_0}.$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'_0 \delta t'^2_0} - 4 u'_0 \left(\frac{\delta f'_0}{\delta t'_0}\right)^2 + 4 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta t'_0} + 4 u'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta t'^2_0}$$
$$+ 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta t'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^3 f'_0}{\delta u'_0 \delta t'^2_0} - 48 r^6 u'^5_0 w'^2_0 g'_0$$
$$- 8 r^6 u'^6_0 w'^2_\theta \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0}.$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta v'_0 \delta t'^2_0} = 0.$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta w'_0 \delta t'^2_0} = 4 w'_0 \left(\frac{\delta f'_0}{\delta t'_0}\right)^2 + 4 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta w'_0 \delta t'_0} + 4 w'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta t'^2_0}$$
$$+ 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta t'^2_0} + 2 e'_0 f'_0 \frac{\delta^3 f'_0}{\delta w'_0 \delta t'^2_0} - 16 r^6 u'^6_0 w'_0 g'_0$$
$$- 8 r^6 u'^6_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta w'_0}.$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'_0 \delta v'_0 \delta w'_0} = 0 \cdot \frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'_0 \delta v'_0 \delta t'_0} = 0 \cdot \frac{\delta^3 F'_0}{\delta v'_0 \delta w'_0 \delta t'_0} = 0.$$

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0 \delta t'_0} = 4 u'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} \cdot \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} + 4 u'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta w'_0 \delta t'_0} + 4 w'_0 \cdot$$
$$\frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} + 4 w'_0 f'_0 \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta t'_0} + 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta u'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta w'_0 \delta t'_0}$$
$$+ 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta w'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta t'_0} + 2 e'_0 \frac{\delta f'_0}{\delta t'_0} \cdot \frac{\delta^2 f'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0} + 2 e'_0 f'_0 \cdot$$
$$\frac{\delta^3 f'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0 \delta t'_0} - 2 [48 r^6 u'^5_0 w'_0 g'_0 + 24 r^6 u'^5_0 w'^2_0 \frac{\delta g'_0}{\delta w'_0}$$
$$+ 8 r^6 u'^6_0 w'_0 \frac{\delta g'_0}{\delta u'_0} + 4 r^6 u'^6_0 w'_0 \frac{\delta^2 g'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0}].$$

Setzen wir nun die Werte für u'_0, v'_0, w'_0, wie sie oben angegeben wurden, in die obigen Ausdrücke ein, so erhalten wir für die Derivierten die folgenden Werte:

$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'^3_0} = \frac{576\sqrt{3}}{r^3}; \quad \frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'_0 \delta v'^2_0} = -\frac{1728\sqrt{3}}{r^3}; \quad \frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'^2_0 \delta w'_0} = \frac{720\sqrt{6}}{r^3};$$
$$\frac{\delta^3 F'_0}{\delta v'^2_0 \delta w'_0} = \frac{432\sqrt{3}}{r^3}; \quad \frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'^2_0 \delta t'_0} = -\frac{3888}{r^4}; \quad \frac{\delta^3 F'_0}{\delta v'^2_0 \delta t'_0} = \frac{3888}{r^4};$$
$$\frac{\delta^3 f'_0}{\delta u'_0 \delta w'^2_0} = \frac{1152\sqrt{3}}{r^3}; \quad \frac{\delta^3 F'_0}{\delta u'_0 \delta w'_0 \delta t'_0} = -\frac{3888\sqrt{2}}{r^4};$$

$$\frac{\partial_3 F'_0}{\partial u'_0 \partial t'^2_0} = -\frac{7776\sqrt{3}}{r^5}; \quad \frac{\partial^3 F'_0}{\partial w'^3_0} = -\frac{1152\sqrt{6}}{r^3}; \quad \frac{\partial^3 F'_0}{\partial w'_0 \partial t'^2_0}$$
$$\frac{3888\sqrt{6}}{r^5}; \quad \frac{\partial^3 F'_0}{\partial t'^3_0} = -\frac{48 \cdot 729}{r^6}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte in die Gleichung der dritten Derivierten

$$\triangle F'^{III}_0 - \left(u' \frac{\partial F'_0}{\partial u'_0} + v' \frac{\partial F'_0}{\partial v'_0} + w' \frac{\partial F'_0}{\partial w'_0} + t' \frac{\partial F'_0}{\partial t'_0}\right)^3 = 0$$

ein, so erhalten wir die Gleichung:

$$u'^3 \frac{576\sqrt{3}}{r^3} - 3u'v'^2 \frac{1728\sqrt{3}}{r^3} + 3u'^2 w' \frac{720\sqrt{6}}{r^3} + 3v'^2 w' \frac{432\sqrt{6}}{r^4}$$
$$- 3u'^2 \frac{3888}{r^4} + 3v'^2 \frac{3888}{r^4} + 3u'w'^2 \frac{1152\sqrt{3}}{r^3} - 6u'w' \frac{3888\sqrt{2}}{r^4}$$
$$+ 3u' \frac{7776\sqrt{3}}{r^5} - w'^3 \frac{1152\sqrt{6}}{r^3} + 3w' \frac{3888\sqrt{6}}{r^5} - \frac{48 \cdot 729}{r^6} = 0.$$

Dividieren wir die ganze Gleichung mit $\frac{48}{r^3}$ so ergibt sich:

$$12\sqrt{3}\, u'^3 - 108\sqrt{3}\, u'v'^2 + 45u'^2 w'\sqrt{6} + 27\sqrt{6}\, v'^2 w' -$$
$$\frac{243}{r} u'^2 + \frac{243}{r} v'^2 + 72\sqrt{3}\, u'w'^2 - \frac{486}{r}\sqrt{2}\, u'w' + \frac{486}{r^2} u'$$
$$- 24\sqrt{6} w'^3 + \frac{243}{r^2}\sqrt{6} w' - \frac{729}{r^3} = 0.$$

Formen wir die Gleichung um, so können wir sie in folgende drei Glieder zusammenfassen:

$$(12\sqrt{3}\, u'^3 + 48\sqrt{6}\, u'^2 w' + 96\sqrt{3}\, u'w'^2 - 72\sqrt{3} \cdot \frac{u'^2}{r}$$
$$- \frac{434\sqrt{2}}{r} \cdot u'w' + \frac{324\sqrt{3}}{r^2} u' - 108\sqrt{3}\, u'v'^2) + (-3\sqrt{6}\, u'^2 w'$$
$$- 24\sqrt{3}\, u'w'^2 - 24\sqrt{6}\, w'^3 + \frac{54\sqrt{2}}{r} u'w' - \frac{216}{r} w'^2 -$$
$$\frac{81\sqrt{6}}{r^2} w' - 27\sqrt{6}\, v'^2 w') + (-\frac{27}{r} u'^2 - \frac{108\sqrt{2}}{r} u'w' - \frac{216}{r} w'^2$$
$$- \frac{162\sqrt{3}}{r} u' - \frac{324\sqrt{6}}{r} w' - \frac{729}{r^3} - \frac{243}{r} v'^2) = 0,$$

oder:

$$4\sqrt{3}\,u'(3u'^2 + 12\sqrt{2}\,u'w' + 24w'^2 - \frac{18\sqrt{3}}{r}u' - \frac{36\sqrt{6}}{r}w' + \frac{81}{r^2} - 27v'^2) - \sqrt{6}\,w'(3u'^2 + 12\sqrt{2}\,u'w' + 24w'^2 - \frac{18\sqrt{3}}{r}u' - \frac{36\sqrt{6}}{r}w' + \frac{81}{r^2} - 27v'^2) - \frac{9}{r}(3u'^2 + 12\sqrt{2}\,u'w' + 24w'^2 - \frac{18\sqrt{3}}{r}u' - \frac{36\sqrt{6}}{r}w' + \frac{81}{r^2} - 27v'^2) = 0.$$

oder:

$$\left(3u'^2 + 12\sqrt{2}\,u'w' + 24w'^2 - \frac{18\sqrt{3}}{r}u' - \frac{36\sqrt{6}}{r}w' + \frac{81}{r^2} - 27v'^2\right) \cdot \left(4\sqrt{3}u' - \sqrt{6}\,w' - \frac{9}{r}\right) = 0.$$

Die erste Klammer können wir nun umformen, wie der folgende Ausdruck deutlich zeigt:

$$\left[\left(\sqrt{3}\,u' + 2\sqrt{6}w' - \frac{9}{r}\right)^2 - (3\sqrt{3}\,v')^2\right]\left(4\sqrt{3}\,u' - \sqrt{6}\,w' - \frac{9}{r}\right) = 0.$$

Die erste Klammer enthält die Differenz zweier Quadrate. Zerlegen wir diese Differenz in ihre Faktoren, so erhalten wir als Endresultat:

$$\left[\left(\sqrt{3}\,u' + 2\sqrt{6}w' - \frac{9}{r}\right) - 3\sqrt{3}\,v'\right] \cdot \left[\left(\sqrt{3}\,u' + 2\sqrt{6}\,w' - \frac{9}{r}\right) + 3\sqrt{3}\,v'\right] \cdot \left(4\sqrt{3}\,u' - \sqrt{6}\,w' - \frac{9}{r}\right) = 0.$$

Aus dem Verlauf der Untersuchungen ergibt sich somit, daß die Fläche dritter Klasse zerfällt. Es berührt, wie das letzte Resultat zeigt, die Ebene $u'_0 = \frac{\sqrt{3}}{r}$, $w'_0 = \frac{\sqrt{6}}{r}$, $v' = 0$ die Fläche in drei verschiedenen Punkten, sie ist eine tripunktuelle Tangentialebene. Die Gleichungen der Berührungspunkte sind nach obigem:

$$\text{I.)}\quad \sqrt{3}\,u' - 3\sqrt{3}\,v' + 2\sqrt{6}\,w' - \frac{9}{r} = 0,$$

$$\text{II.)}\quad \sqrt{3}\,u' + 3\sqrt{3}\,v' + 2\sqrt{6}\,w' - \frac{9}{r} = 0,$$

$$\text{III.)}\quad 4\sqrt{3}\,u' - \sqrt{6}\,w' - \frac{9}{r} = 0.$$

Gehen wir zu Punktkoordinaten über, so sind die Koordinaten der Berührungspunkte, die folgenden.

$$\text{I.)}\ x' = -\frac{r\sqrt{3}}{9},\ y' = \frac{r\sqrt{3}}{3},\ z' = \frac{-2r\sqrt{6}}{9};$$

$$\text{II.)}\ x' = -\frac{r\sqrt{3}}{9},\ y' = -\frac{r\sqrt{3}}{3},\ z' = -\frac{2r\sqrt{6}}{9};$$

$$\text{III.)}\ x' = -\frac{4r\sqrt{8}}{9},\ y' = 0,\ z' = \frac{r\sqrt{6}}{9}.$$

Da in den zweiten Derivierten die Größen u'_0, v'_0, w'_0 nur quadratisch auftreten, so verschwinden die zweiten Derivierten auch für: $u_0 = v_0 = -w_0$, $u_0 = -v_0 = w_0$, $-u_0 = v_0 = w_0$, $u_0 = -v_0 = -w_0$, $-u_0 = v_0 = -w_0$, $-u_0 = -v_0 = w_0$, $-u_0 = -v_0 = -w_0$ bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem, d. h. es gibt für $|u_0| = |v_0| = |w_0| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2r}\right|$ acht tripunktuelle Tangentenebenen. Die Koordinaten der Berührungspunkte der Tangentenebenen ergeben sich aus obigen Werten nach Transformation auf die Hauptachsen durch zyklische Vertauschung.

§ 6. Die unendlich ferne Ebene.

Die unendlich ferne Ebene hat die Koordinaten $u' = 0$, $v' = 0, w' = 0$, t' ungleich 0. Für diese Untersuchungen werde wieder die Flächengleichung bezogen auf die Hauptachsen benützt. Aus § 2 ergibt sich, daß die ersten Derivierten verschwinden. Setzen wir in den zweiten Derivierten zu $u' = 0$, noch $v' = 0$ so verschwinden auch diese. Desgleichen verschwinden die dritten Derivierten, was aus § 3 folgt; setzen wir noch $w' = 0$ so werden auch die vierten Ableitungen des § 3 zu Null; ebenso verschwinden aber auch die zu bildenden fünften Derivierten, aber nicht alle sechster Ordnung. Diese Resultate lassen sich aber auch leicht aus der Flächengleichung selbst herauslesen, wenn wir sie in der folgenden Form anschreiben:

$$(u^2 + v^2 + w^2)^3\, t^8 - 2\,(u^2 + v^2 + w^2)^2\,[4r^2\,(u^2 v^2 + u^2 w^2 + v^2 w^2)\, t^2 + 4\, r^4\, u^2 v^2 w^2]\, t^4 + (u^2 + v^2 + w^2)\,[4\, r^2\,(u^2 v^2$$

$+ u^2 w^2 + v^2 w^2) t^2 - 4 r^4 u^2 v^2 w^2]^2 - 64 r^6 u^2 v^2 w^2 t^2 (u^2 + v^2) (u^2 + w^2) (v^2 + w^2) = 0.$

Die sechsten Derivierten verschwinden nicht alle. Es sind dies:

$$\frac{\delta^6 F'}{\delta u'^6}, \frac{\delta^6 F'}{\delta v'^6}, \frac{\delta^6 F'}{\delta w'^6}, \frac{\delta^6 F'}{\delta u'^4 \delta v'^2}, \frac{\delta^6 F'}{\delta u'^4 \delta w'^2}, \frac{\delta^6 F'}{\delta u'^2 \delta v'^4}, \frac{\delta^6 F'}{\delta u'^2 \delta w'^4},$$

$$\frac{\delta^6 F'}{\delta u'^2 \delta v'^2 \delta w'^2}, \frac{\delta^6 F'}{\delta v'^4 \delta w'^2}, \frac{\delta^6 F'}{\delta v'^2 \delta w'^4}.$$

Die Werte der angeführten Derivierten für $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$, $t' = 1$ sind folgende:

$$\frac{\delta^6 F'}{\delta u'^6} = 720, \frac{\delta^6 F'}{\delta v'^6} = 720, \frac{\delta^6 F'}{\delta w'^6} = 720, \frac{\delta^6 F'}{\delta u'^4 \delta v'^2} = 144,$$

$$\frac{\delta^6 F'}{\delta u'^4 \delta w'^2} = 144, \frac{\delta^6 F'}{\delta u'^2 \delta v'^4} = 144, \frac{\delta^6 F'}{\delta u'^2 \delta w'^4} = 144,$$

$$\frac{\delta^6 F'}{\delta u'^2 \delta v'^2 \delta w'^2} = 48, \frac{\delta^6 F'}{\delta u'^4 \delta w'^2} = 144, \frac{\delta^6 F'}{\delta v'^2 \delta w'^4} = 144.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung

$$\Delta F'^{VI} \equiv \left(u \frac{\delta F'}{\delta u'} + v \frac{\delta F'}{\delta v'} + w \frac{\delta F'}{\delta w'} + t \frac{\delta F'}{\delta t'}\right)^6 = 0$$

ein, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$720 u^6 + 2160 u^4 v^2 + 2160 u^2 v^4 + 720 v^6 + 2160 u^4 w^2 + 4320 u^2 v^2 w^2 + 2160 v^4 w^2 + 2160 u^2 w^4 + 2160 v^2 w^4 + 720 w^2 = 0.$$

Dividieren wir die Gleichung mit 720, so ergibt sich:

$$u^6 + 3 u^4 v^2 + 3 u^2 v^4 + v^6 + 3 u^4 w^2 + 6 u^2 v^2 w^2 + 3 v^4 w^2 + 3 u^2 w^4 + 3 v^2 w^4 + w^6 = 0.$$

Aus dieser Gleichung erkennen wir sofort, daß sie die Ausrechnung von

$$(u^2 + v^2 + w^2)^3 = 0$$

ist. Dasselbe Resultat hätten wir erhalten, wenn wir in der ausgerechneten Flächengleichung, die nebenbei bemerkt vierundvierzig Glieder hat, die Glieder der niedrigsten Dimension für sich Null setzten. Dabei ist die Flächengleichung nicht homogen zu nehmen.

Die Diskussion der obigen Gleichung ist rasch erledigt. Es ist die Gleichung des imaginären Kugelkreises. Die

unendlich ferne Ebene berührt demnach die vorliegende Fläche nach dem imaginären Kugelkreise und dieser ist dreifach zu zählen.

Es wäre nun noch die Frage zu beantworten, ob mit obigen Untersuchungen auch alle singulären Ebenen gefunden sind. Gibt es bei der Fläche außer den bereits gefundenen nicht noch andere singuläre Tangentenebenen? Diese Frage wäre unzweifelhaft erledigt, wenn es gelänge, die simultanen Werte von u', v' w', t' aufzufinden, für welche sämtliche ersten Derivierten verschwinden. Im allgemeinen geht man hierbei am zweckmäßigsten von $\frac{\delta F'}{\delta t'}$ aus. Man untersucht, für welche Werte von u', v', w', t' dieser Ausdruck verschwindet. Nun zeigt schon das bloße Anschreiben des Ausdruckes von $\frac{\delta F'}{\delta t'}$, daß diese Methode hier undurchführbar ist. Der Ausdruck für $\frac{\delta F'}{\delta t'}$ ist:

$$(u'^2 + v'^2 + w'^2)\,[(u'^2 + v'^2 + w'^2)\,t'^4 - 4\,r^2\,(u'^2 v'^2 + u'^2 w'^2 + v'^2 w'^2)\,t'^2 - 4\,r^2\,u'^2 v'^2 w'^2] \cdot [4\,(u'^2 + v'^2 + w'^2)\,t'^3 - 8\,r^2\,(u'^2 v'^2 + u'^2 w'^2 + v'^2 w'^2)\,t'] - 128\,r^6\,u'^2 v'^2 w'^2 t'\,(u'^2 + v'^2)\,(u'^2 + w'^2)\,(v'^2 + w'^2) = 0.$$

Wir müssen daher versuchen, auf einem anderen Wege ans Ziel zu kommen. Betrachten wir die einzelnen singulären Tangentenebenen der Fläche, so zeigt sich, daß dann und nur dann Singularität eintreten kann, wenn in einer Ebene mehrere Kreislagen möglich sind, d. h. wenn in einer und derselben Ebene gleichzeitig zwei, drei oder vier Kreise liegen. Nun können nur dann zwei Kreise gleichzeitig auftreten, wenn das in der Einleitung erwähnte Dreieck gleichschenklig ist. In diesem Falle haben die den Schenkeln anliegenden Kreise gleiche Radien. Gleichschenklige Dreiecke können aber nur in den Ebenenlagen des § 4 auftreten, was keines Beweises bedarf. Für den Fall, daß drei Kreise gleichzeitig in einer Ebene liegen sollen, ist notwendig, daß das schon erwähnte Dreieck gleichseitig ist. In diesem Falle haben die drei angeschriebenen Kreise gleiche Radien.

Dagegen sind die Ebenen, die wohl auch gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke ausschneiden, denen aber die Kreise einbeschrieben sind, gewöhnliche Tangentenebenen der Fläche wie ebenfalls aus § 4 hervorgeht. Vier Kreise in einer Tangentenebene sind nur denkbar in den Lagen der Tangentenebenen, wie sie in den §§ 1, 2 und 3 behandelt wurden. Nehmen wir noch die unendlich ferne Ebene hinzu, so sind die möglichen singulären Tangentenebenen erschöpft. Zudem haben sich bei anderen Untersuchungen keine neuen singulären Tangentenebenen ergeben.

Damit schließen wir den ersten Teil, der den singulären Ebenen der Fläche gewidmet war. Wir gehen nun dazu über, die Gestalt der Enveloppe herauszuarbeiten. Dies möge im zweiten Teil durchgeführt werden.

II. TEIL.

Die Gestalt der Fläche.

§ 1. Einleitung. Umformung der Flächengleichung.

Wäre die Gleichung der Fläche in Punktkoordinaten gegeben, so wäre es verhältnismäßig leicht, durch Parallelschnitte zu den Koordinatenebenen ein Bild von der Fläche zu gewinnen. Nun ist aber die Fläche hier in Ebenenkoordinaten gegeben und es ist ausgeschlossen dieselbe in Punktkoordinaten darzustellen. Wir müssen daher auf anderem Wege ans Ziel zu gelangen suchen. Folgende Ueberlegung bietet eine Möglichkeit, mit einfachen Mitteln die Gestalt der Fläche zu erhalten.

Setzen wir z. B. in der Flächengleichung $v = 0$, so stellt uns die neue Gleichung einen Cylinder dar. Dieser ist die Enveloppe aller Tangentenebenen der Fläche, welche die Koordinaten $(u', 0, w')$ haben. Bestimmen wir nun für eine beliebige dieser Ebenen die Gleichung des Berührungspunktes mit Hilfe der Beziehung:

$$\left(u\,\frac{\delta F'}{\delta u'} + v\,\frac{\delta F'}{\delta v'} + w\,\frac{\delta F'}{\delta w'} + t\,\frac{\delta F'}{\delta t'}\right) = 0,$$

so erhalten wir für x, y, z, die Punktkoordinaten des Berührungspunktes, die folgenden Gleichungen:

$$x = \frac{\dfrac{\delta F'}{\delta u'}}{\dfrac{\delta F'}{\delta t'}},\quad y = \frac{\dfrac{\delta F'}{\delta v'}}{\dfrac{\delta F'}{\delta t'}},\quad z = \frac{\dfrac{\delta F'}{\delta w'}}{\dfrac{\delta F'}{\delta t'}},$$

oder: $x = f_1(u', w')$, $y = f_2(u', w')$, $z = f_3(u', w')$, wobei zwischen u' und w' noch die Relation besteht: $F'(u'\,w') = 0$. Ist u', w' fest, so stellen obige Gleichungen für x, y, z in

Verbindung mit F′ (u′, w′) = 0 einen Punkt dar; ist aber u′, w′ variabel, so stellen die Gleichungen eine Kurve im Raume dar.

Nun führen wir eine Drehung des Koordinatensystems um die Z-Achse aus, wobei die neue X′-Achse mit der alten X-Achse den ∢ φ bilden möge. Lassen wir jetzt φ alle Werte von 0^0 bis 360^0 annehmen und verfahren im übrigen genau, wie oben angegeben wurde, so erhalten wir eine Kurvenschar, deren Gesamtheit einen Teil der Fläche ausmacht. Die gesamte Fläche erhalten wir, wenn wir dieselben Operationen für die beiden anderen Koordinatenachsen vornehmen, d. h. eine Drehung des Koordinatensystems auch um die Y-Achse und um die X-Achse ausführen, im übrigen dann wie schon oben angegeben verfahren.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir die gegebene Flächengleichung umformen.

Wir gehen von der irrationalen Form der Flächengleichung aus. Sie lautet:

$$r(u\sqrt{w^2+v^2}+v\sqrt{u^2+w^2}+w\sqrt{u^2+v^2})+t\sqrt{u^2+v^2+w^2}=0$$

wobei t wieder homogenisierende Variable ist.

Wir bilden nun die ersten Derivierten:

$$\frac{\delta F'}{\delta u'}=r\left(\sqrt{v'^2+w'^2}+\frac{u'v'}{\sqrt{u'^2+w'^2}}+\frac{u'w'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}\right)+\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}};$$

$$\frac{\delta F'}{\delta v'}=r\left(\frac{u'v'}{\sqrt{v'^2+w'^2}}+\sqrt{u'^2+w'^2}+\frac{v'w'}{\sqrt{u'^2+w'^2}}\right)+\frac{v'}{\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}};$$

$$\frac{\delta F'}{\delta w'}=r\left(\frac{u'w'}{\sqrt{v'^2+w'^2}}+\frac{v'w'}{\sqrt{u'^2+w'^2}}+\sqrt{u'^2+w'^2}\right)+\frac{w'}{\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}};$$

$$\frac{\delta F'}{\delta t'}=\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}.$$

Der Berührungspunkt der Ebene (u′, v′, w′) hat die Koordinaten:

$$x=\frac{r}{\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}\left(\sqrt{v'^2+w'^2}+\frac{u'v'}{\sqrt{u'^2+w'^2}}+\frac{u'w'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}+\frac{u}{r\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}\right),$$

$$y=\frac{r}{\sqrt{u'+v'^2+w'^2}}\left(\frac{u'v'}{\sqrt{v'^2+w'^2}}+\sqrt{u'^2+w'^2}+\frac{v'w'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}\right.$$

$$+\frac{v'}{r\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}\Big),$$

$$z=\frac{r}{\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}\left(\frac{u'\,w'}{\sqrt{v'^2+w'^2}}+\frac{v'\,w'}{\sqrt{u'^2+w'^2}}+\sqrt{u'^2+v'^2}\right.$$

$$\left.+\frac{w'}{r\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}\right),$$

wobei aber u', v', w' der Flächengleichung genügen müssen. Lassen wir u', v', w' alle Werte, welche die Flächengleichung erfüllen, annehmen, dann stellen die Gleichungen für x, y, z die Fläche in Parameterform dar.

Wir führen nun eine Drehung des Koordinatensystems um die Z-Achse aus, wie oben angegeben wurde. Die Transformationsformeln lauten:

$$u'=u'_0\cos\varphi-v'_0\sin\varphi,$$
$$v'=u'_0\sin\varphi+v'_0\cos\varphi,$$
$$w=w'_0\,.$$

Setzen wir gleichzeitig $v'=0$ und unterdrücken in den Gleichungen den Index 0, so erhalten wir die erste Kurvenschar.

Die Gleichungen der Cylinder lauten:

$$r\,(u'\cos\varphi\sqrt{u'^2\sin^2\varphi+w'^2}+u'\sin\varphi\sqrt{u'^2\cos^2\varphi+w'^2}$$
$$+u'\,w']+\sqrt{u'^2+w'^2}=0.$$

Dazu die Gleichungen für x' y', z':

$$x'=\frac{r}{\sqrt{u'^2+w'^2}}\left(\frac{\cos\varphi\,(2\,u'^2\sin^2\varphi+w'^2)}{\sqrt{u'^2\sin^2\varphi+w'^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\varphi\,(2\,u'^2\cos^2\varphi+w'^2)}{\sqrt{u'^2\cos^2\varphi+w'^2}}+w'+\frac{u'}{r\sqrt{u'^2+w'^2}}\right),$$

$$y'=\frac{r}{\sqrt{u'^2+w'^2}}\left(\frac{\sin\varphi\,(u'^2\cos 2\varphi-w'^2)}{\sqrt{u'^2\sin^2\varphi+w'^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\varphi\,(u'^2\cos 2\varphi+w'^2)}{\sqrt{u'^2\cos^2\varphi+w'^2}}\right),$$

$$z'=\frac{r}{\sqrt{u'^2+w'^2}}\left(\frac{u'\,w'\cos\varphi}{\sqrt{u'^2\sin^2\varphi+w'^2}}\right.$$
$$\left.+\frac{u'\,w'\sin\varphi}{\sqrt{u'^2\cos^2\varphi+w'^2}}+u'+\frac{w'}{r\sqrt{u'^2+w'^2}}\right).$$

Diese vier Gleichungen bilden die Gleichungen der Kurvenschar. Um nun von der lästigen Pflicht, beachten zu müssen, daß u′, w′ immer der Flächengleichung genügen müssen, frei zu werden, setzen wir $u' = k \cdot w'$, berechnen w′ aus der Flächengleichung und setzen für w′ den gefundenen Wert in die Gleichungen für x′, y′, z′ ein. Wir erhalten für w′:

$$w' = \frac{-\sqrt{k^2+1}}{r(k\cos\varphi\sqrt{k^2\sin^2\varphi+1}+k\sin\varphi\sqrt{k^2\cos^2\varphi+1}+k)};$$

für x′, y′, z′ ergeben sich dann die folgenden Ausdrücke:

$$x' = \frac{r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{\cos\varphi\,(k^4\sin^2\varphi+2k^2\sin^2\varphi+1)}{(k^2+1)\sqrt{k^2\sin^2\varphi+1}}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\varphi\,(k^4\cos^2\varphi+2k^2\cos^2\varphi+1)}{(k^2+1)\sqrt{k^2\cos^2\varphi+1}}+\frac{1}{k^2+1}\right),$$

$$y' = \frac{r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{\sin\varphi\,(k^2\cos 2\varphi-1)}{\sqrt{k^2\sin^2\varphi+1}}+\frac{\cos\varphi\,(k^2\cos 2\varphi+1)}{\sqrt{k^2\cos^2\varphi+1}}\right),$$

$$z' = \frac{r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^3\cos^3\varphi}{(k^2+1)\sqrt{k^2\sin^2\varphi+1}}+\frac{k^3\sin^3\varphi}{(k^2+1)\sqrt{k^2\cos^2\varphi+1}}\right.$$
$$\left.+\frac{k^3}{k^2+1}\right).$$

Diese Gleichungen stellen, wie schon oben erwähnt wurde, nur einen Teil der Fläche dar, die anderen Teile bekommen wir durch zyklische Vertauschung von x, y, z.

Nun haben diese Gleichungen noch eine unangenehme Eigenschaft, das ist das Auftreten der Wurzeln. Doch hätten wir auch, selbst wenn wir von der rationalen Form der Flächengleichung ausgegangen wären, die Wurzeln nicht ganz vermeiden können, wenn wir die Flächengleichung in obige Form hätten bringen wollen, was leicht einzusehen ist, da ja zu jedem Wert von x und y infolge der Symmetrie zwei Werte von z gehören müssen. Zudem wären dabei auch die Gleichungen viel zu kompliziert, umfangreich und unübersichtlich geworden, während wir oben den Vorteil einer gewissen Einfachheit haben. Indes können wir uns auch bei Gebrauch der irrationalen Form leicht zurechtfinden, wenn wir die folgenden Ausführungen beachten, die sich auf obige Gleichungen beziehen.

Zunächst ist zu beachten, daß zu jedem Wert von x′, y′, zwei Werte von z′ gehören, da die Fläche symmetrisch ist; es ist dies ein positiver und ein negativer Wert von z′. Ueber die weitere Zusammengehörigkeit der Wertetripel, die sich bei Berücksichtigung der Wurzelvorzeichen ergeben, mögen folgende Untersuchungen Klarheit verschaffen.

Wir schreiben die auf die Hauptachsen bezogene Flächengleichung an:

$$r\,(u\sqrt{v^2+w^2}+v\sqrt{u^2+w^2}+w\sqrt{u^2+v^2})+\sqrt{u^2+v^2+w^2}=0$$

und setzen fest:

die Wurzel $\sqrt{v^2+w^2}$ sei mit I,

die Wurzel $\sqrt{u^2+w^2}$ sei mit II,

die Wurzel $\sqrt{u^2+v^2}$ sei mit III und

die Wurzel $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ sei mit IV bezeichnet.

Wir legen nun folgende Tabelle an, wobei I, II, III, IV die Wurzeln, die darunter stehenden Zeichen, die entsprechenden Wurzelvorzeichen bedeuten sollen:

	I	II	III	IV
1.	+	+	+	$\begin{cases}+\\-\end{cases}$
2.	+	+	−	$\begin{cases}+\\-\end{cases}$
3.	+	−	+	$\begin{cases}+\\-\end{cases}$
4.	−	+	+	$\begin{cases}+\\-\end{cases}$

Die Reihe 1. liefere die Werte x'_1, y'_1, z'_1, die Reihe 2. die Werte x'_2, y'_2, z'_2 u. s. w. Vergleichen wir nun die oben gefundenen Ausdrücke für x′, y′, z′ mit der aufgestellten Tabelle, geben wir den dort auftretenden Wurzeln die Vorzeichen in obiger Reihenfolge, so ergibt sich, daß folgende Werte von x′, y′, z′ für ein beliebiges k zusammengehören:

$$\begin{cases}+x'_1, +y'_1, +z'_1; & -x'_1, -y'_1, -z'_1;\\ +x'_1, +y'_1, -z'_1; & -x'_1, -y'_1, +z'_1;\end{cases}$$

Wählen wir nämlich bei IV das Zeichen (+), so erhalten wir lauter (+) Zeichen, wählen wir das untere Zeichen von IV, nämlich (—), so erhalten wir lauter (—). Die zweite Zeile der Wertepaare ergibt sich aus der Bemerkung,

daß zu jedem Werte von x, y, zwei Werte z′ gehören. Entsprechend ergeben sich die übrigen Werte. Gleichzeitig sind aber damit auch alle Vorzeichenmöglichkeiten erschöpft; denn z. B. die Vorzeichenfolge (+ — — —), welche ja auch denkbar wäre und in Betracht zu ziehen ist, ist bereits unter der Vorzeichenfolge — (— + + +) erledigt. Somit wäre die Zusammengehörigkeit der Werte von x′, y′, z′, festgelegt. Wir wissen, daß zu jedem Werte von k vier Wertetripel zu je vier Gruppen gehören, von denen das erste Tripel oben dargestellt ist. Die vier Gruppen können wir uns aber vereinigt denken und es lauten dann die vier obigen Gruppen $\pm x'_1, \pm y'_1, \pm z'_1$, dabei ist freilich die Wahl der Vorzeichen nicht beliebig, sondern in oben angeführter Anordnung zu nehmen, so daß wir schließlich, wenn wir die abgekürzte Schreibweise nehmen, sagen können, jedem Werte von k entsprechen vier Wertetripel von x′, y′, z′.

Des weiteren sei noch erwähnt, daß im folgenden im allgemeinen nur die Untersuchungen für φ von 0^0 bis 90^0 und für k von 0 bis $+\infty$ durchgeführt werden. Es genügen diese Werte, um sowohl einerseits alle Kurven der Kurvenschar zu bestimmen wie andererseits die Gestalt und den Verlauf der Kurven festzulegen. Wo es jedoch nötig sein sollte, werden auch andere Werte von φ und k berücksichtigt.

§ 2. Die Kurven k = 0.

Wir gehen von den letzten Gleichungen für x′, y′, z′ des vorigen Paragraphen aus und setzen darin k = 0, Die Gleichungen gehen dann in die folgenden über:

$$x'_1 = \pm r(\cos\varphi + \sin\varphi + 1),$$

$$y'_1 = \pm r(-\sin\varphi + \cos\varphi),$$

$$z'_1 = 0.$$

Hierbei sind die Vorzeichen unter 1 berücksichtigt, was der Index 1 andeuten soll. Ueberhaupt sollen in Zukunft die Indices an den Größen x′, y′, z′, die Reihenfolge der Vorzeichen angeben, wie es im vorigen Paragraphen

in der Tabelle angegeben wurde. Dementsprechend erhalten wir noch folgende Gleichungen:

$x'_2 = \pm r(\cos\varphi + \sin\varphi - 1)$, $\quad x'_3 = \pm r(\cos\varphi - \sin\varphi + 1)$

$y'_2 = \pm r(-\sin\varphi + \cos\varphi)$, $\quad y'_3 = \pm r(-\sin\varphi - \cos\varphi)$,

$z'_2 = 0$. $\quad z'_3 = 0$.

$$x'_4 = \pm r(-\cos\varphi + \sin\varphi + 1),$$
$$y'_4 = \pm r(\sin\varphi + \cos\varphi),$$
$$z'_4 = 0.$$

Auf die Hauptachsen bezogen lauten die Gleichungen wie folgt:

$x_1 = \pm r(1 + \cos\varphi)$, $\quad x_2 = \pm r(1 - \cos\varphi)$,

$y_1 = \pm r(1 + \sin\varphi)$, $\quad y_2 = \pm r(1 - \sin\varphi)$,

$z_1 = 0$; $\quad z^2 = 0$;

$x^3 = \pm r(1 + \cos\varphi)$, $\quad x_4 = \mp r(1 - \cos\varphi)$,

$y_3 = \mp r(1 - \sin\varphi)$, $\quad y_4 = \pm r(1 + \sin\varphi)$,

$z_3 = 0$; $\quad z_4 = 0$.

Eliminieren wir aus den Gleichungen den Winkel φ, so gehen dieselben in die folgenden über:

$$(x_{1,2} \mp r)^2 + (y_{1,2} \mp r)^2 - r^2 = 0,$$
$$(x_{3,4} \mp r)^2 + (y_{3,4} \pm r)^2 - r^2 = 0.$$

Dabei erkennen wir hier, daß die Gleichungen mit dem Index 1 und 2, ebenso 3 und 4 dieselben Kurven darstellen. Es sind dies die Gleichungen von vier Kreisen mit dem Radius r. Die Mittelpunkte haben die Koordinaten $(+r, +r)$, $(-r, -r)$, $(+r, -r)$, $(-r, +r)$. Die Kreise berühren demnach die Koordinatenachsen. Dieselben Resultate haben wir schon auf anderem Wege in § 1 des I. Teils mit Hilfe der rationalen Gleichungsform erhalten, damit hätten wir einen Beweis für die Richtigkeit der Resultate bei den Untersuchungen, bei welchen wir die irrationale Form der Gleichung zugrunde legen.

Wir können nun als Resultat dieses § angeben, daß die Curven $k = 0$ vier Kreise darstellen, oder mit anderen Worten, die (XY)-Ebene berührt die Fläche nach vier Kreisen. Die Lage derselben wurde bereits in § 1 des I. Teils gezeichnet.

Entsprechende Resultate ergeben sich für die (XZ)- und (YZ)-Ebene.

§ 3. Die Kurven $\varphi = 0$.

Für $\varphi = 0$ erhalten wir Gleichungen bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem. Wir erhalten nach § 1 die folgenden Beziehungen:

$$x_1 = \pm \frac{r}{\sqrt{k^2+1}} \left(\frac{1}{k^2+1} + \frac{1}{k^2+1} \right)$$

$$= \pm \frac{r}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{2}{k^2+1};$$

$$y_1 = \pm \frac{r}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{k^2+1}{\sqrt{k^2+1}} = \pm r;$$

$$z_1 = \pm \frac{r}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \left(\frac{k^3}{k^2+1} + \frac{k^3}{k^2+1} \right)$$

$$= \pm r \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{2k^3}{k^2+1};$$

$x_2 = 0,$	$x_3 = x_1,$	$x_4 = 0,$
$y_2 = \pm r,$	$y_3 = \mp y_1,$	$y_4 = \pm r,$
$z_2 = 0;$	$z_3 = z_1;$	$z_4 = 0.$

Erledigen wir zunächst die Resultate 2 und 4. Die Gleichungen stellen zwei Punkte dar auf der Y-Achse in der Entfernung $\pm r$ vom Koordinatenanfangspunkte. Dies Resultat ist im Einklang mit dem unter § 3 des I. Teils gefundenen. Ein neuer Beweis für die Richtigkeit der Untersuchungen mit der irratinalen Gleichungsform. In gleicher Weise lassen sich zwei Punkte auf der X- und auf der Z-Achse nachweisen. Ihre Koordinaten sind: $x = \pm r$, $y = 0$, $z = 0$ und $x = 0$, $y = 0$, $z = \pm r$, was aus Symmetriegründen folgt unter Anwendung zyklischer Vertauschung.

Nun zur Behandlung der Gleichungen unter 1 und 3. Die Gleichungen unter 3 stimmen mit denen unter 1 überein, stellen also dieselben Kurven in gleicher Lage dar. Zur Erleichterung der Diskussion dieser Kurven eliminieren wir k. Potenzieren wir mit $^2/_3$ sowohl x_1 wie z_1, so erhalten wir folgende Gleichung, wenn wir noch die linken und die rechten Seiten addieren:

$$x_1^{\,2/3} + z_1^{\,2/3} = (2r)^{2/3}.$$

Mit $y_1 = \pm r$ haben wir die Gleichungen zweier Astroiden. Dieselben sind einem Kreise mit dem Radius 2r einbeschrieben. Ihre Ebenen stehen senkrecht auf der Y-Achse in der Entfernung $\pm r$ vom Koordinatenanfangspunkte. Es sei gleich hier bemerkt, daß auch diese Resultate mit früherem unter § 2 des I. Teils übereinstimmen.

Aus Symmetriegründen folgt, daß es auch zur X- und und Z-Achse je zwei solche Astroiden gibt, deren Ebenen in den Entfernungen $\pm r$ vom Koordinatenanfangspunkte auf den entsprechenden Koordinatenachsen senkrecht stehen. Ihre Gleichungen sind:

$$x = \pm r, \qquad z = \pm r,$$
$$y^{2/3} + z^{2/3} = (2r)^{2/3}; \qquad x^{2/3} + y^{2/3} = 2r^{2/3}.$$

Nun sind die Fragen zu beantworten: Welche Lage haben die Astroiden zu den Koordinatenebenen, wie liegen sie zu einander, besteht Zusammenhang unter ihnen?

Wir untersuchen zunächst die Astroide

$$x = + r,$$
$$y^{2/3} + z^{2/3} = (2r)^{2/3}.$$

Setzen wir $z = 0$, so erhalten wir die Lage des einen Paares von Spitzen; es wird $y = \pm 2r$; die Koordinaten zweier Spitzen sind demnach: $(x = + r, y = + 2r, z = 0)$. $(x = + r, y = - 2r, z = 0)$. Diese beiden Spitzen liegen also in der (XY)-Ebene. Für die beiden anderen Spitzen erhalten wir die Koordinaten $(x = + r, y = 0, z = + 2r)$. $(x = + r, y = 0, z = - 2r)$, sie liegen also in der (XZ)-Ebene. Da diese Punkte $(\pm r, 0, \pm 2r)$ und $(\pm r, \pm 2r, 0)$ auch den im vorigen Paragraphen gefundenen Kreisen angehören, so ist offenbar, daß in den betreffenden Punkten die Astroiden mit den Kreisen zusammenhängen. Die Spitzen der Astroiden ruhen in diesen Punkten auf den Kreisen. Dasselbe gilt aus Gründen der Symmetrie auch für die anderen Astroiden.

Zur Festsellung des Zusammenhanges der Astroiden unter sich müssen wir zwei zusammennehmen. Zugleich mögen folgende Abkürzungen Platz greifen: es sei die

Astroide $x = + r, y^{2/3} + z^{2/3} = (2r)^{2/3}$ mit $a_1, y = + r, x^{2/3} + z^{2/3} = (2r)^{2/3}$ mit a_2, und $z = + r, x^{2/3} + y^{2/3} = (2r)^{2/3}$ mit a_3 bezeichnet. Diese Abkürzungen werden im folgenden stets beibehalten.

Wir nehmen nun a_1 mit a_2 zusammen.

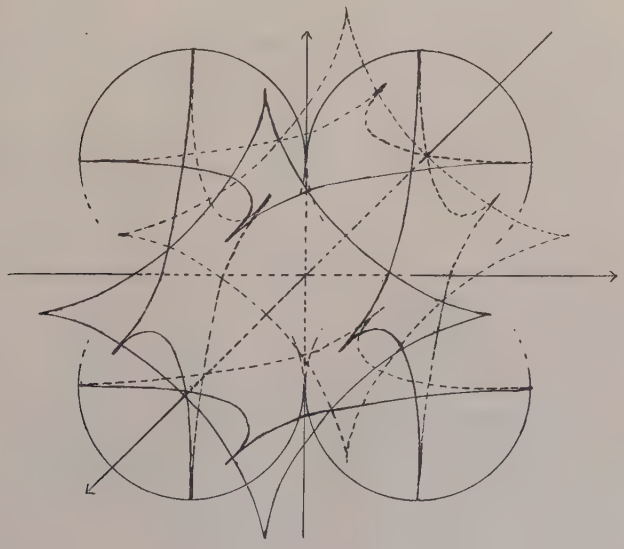
Setzen wir in den Gleichungen der beiden Astroiden $x=y=r$, so erhält z in beiden Fällen den Wert:

$$z = r\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - 1).$$

Daraus ersehen wir, daß die sechs Astroiden unter sich zusammenhängen. In jedem Oktanten bilden sie ein Dreieck, das von Astroidenbogen begrenzt ist. Die Koordinaten der Eckpunkte dieses Dreiecks im ersten Oktanten sind die folgenden:

$x = r,$	$x = r,$	$x = r\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - 1),$
$y = r,$	$y = r\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - 1),$	$y = r,$
$z = r\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - 1);$	$z = r;$	$z = r.$

Damit sind die Untersuchungen über die Kurven $\varphi = 0$ erschöpft. Folgende Zeichnung gibt Aufschluß über die gegenseitige Lage der Astroiden und Kreise.



Die Kurven $\varphi = 45^0$.

Wir behandeln nach den Kurven $\varphi = 0$ die Kurven $\varphi = 45^0$ und zwar aus zwei Gründen: 1. nehmen diese Kurven eine besondere Stellung ein, 2. gestalten sich die Kurvengleichungen hier noch einfacher.

Für $\varphi = 45^0$ erhalten wir aus § 1 die folgenden Gleichungen:

$$x'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^4+2k^2+2}{2(k^2+1)\sqrt{k^2+2}} + \frac{k^4+2k^2+2}{2(k^2+1)\sqrt{k^2+2}} + \frac{1}{k^2+1}\right),$$

$$y'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{-1}{\sqrt{k^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{k^2+2}}\right),$$

$$z'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^3}{2(k^2+1)\sqrt{k^2+2}} + \frac{k^3}{2(k^2+1)\sqrt{k^2+2}} + \frac{k^3}{k^2+1}\right);$$

oder:

$$x'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^4+2k^2+2}{(k^2+1)\sqrt{k^2+2}} + \frac{1}{k^2+1}\right),$$

$$y'_1 = 0,$$

$$z'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^3}{(k^2+1)\sqrt{k^2+2}} + \frac{k^3}{k^2+1}\right).$$

Ferner erhalten wir bei Berücksichtigung der Vorzeichen noch folgende Gleichungen, deren einfachste Form gleich angeschrieben werde. Diese Gleichungen sind:

$$x'_2 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^4+2k^2+2}{(k^2+1)\sqrt{k^2+2}} - \frac{1}{k^2+1}\right),$$

$$y'_2 = 0,$$

$$z'_2 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^3}{(k^2+1)\sqrt{k^2+2}} - \frac{k^3}{k^2+1}\right).$$

$$x'_3 = \frac{\pm r}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}}, \qquad x'_4 = \frac{\pm r}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}},$$

$$y'_3 = \frac{\mp 2r}{\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+2}}, \qquad y'_4 = \frac{\pm 2r}{\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+2}},$$

$$z'_3 = \frac{\pm r\,k^3}{\sqrt{k^2+1}\,(k^2+1)}; \qquad z'_4 = \frac{\pm r\,k^3}{\sqrt{k^2+1}\,(k^2+1)}.$$

Schon die äußere Form obiger Gleichungen deutet auf einen Zusammenhang der Gleichungen 1 und 2, ebenso der Gleichungen 3 und 4 hin. Und wirklich stellen die Gleichungen 1 und 2 zusammen eine geschlossene ebene Kurve auf der Fläche dar, die Gleichungen 3 und 4 eine Raumkurve, der Beweis hiefür ist leicht zu erbringen.

Die Gleichung der Kurve, welche den Gleichungen 1 und 2 entspricht, lautet in Linienkoordinaten:

$$(u'^2 + w'^2)(r^2 u'^2 - 1)^2 - 4 r^2 u'^2 w'^2 = 0.$$

Es ist dies der Ort der Berührungspunkte der Ebenen, welche in § 4 des I. Teils unter b erwähnt wurden.

Die Gleichungen 3 und 4 stellen den Ort der Berührungspunkte der Ebenen des Zylinders

$$u'^2 + w'^2 - r^2 u'^2 w'^2 = 0$$

dar, welcher in § 4 des I. Teils unter a sich ergab. Dort haben wir für die Gleichungen des Ortes der Berührungspunkte der Ebenen der Enveloppe mit der Fläche folgende Beziehungen gefunden:

$$x' = \frac{1 - r^2 w'^2_0}{r^2 u'_0 w'^2_0},$$

$$y' = \frac{\pm 2}{u'_0 \sqrt{r^2 u'^2_0 + 1}},$$

$$z' = \frac{1 - r^2 u'^2_0}{r^2 u'^2_0 w'_0},$$

wobei u'_0, w'_0 der Gleichung $u'^2 + w'^2 - r^2 u'^2 w'^2 = 0$ genügen müssen. Setzen wir hier $u'_0 = k w'_0$ so gehen die letzteren Gleichungen in die obigen über.

Wir beginnen nun mit der Diskussion der Kurven und zwar mit 1 und 2.

Für $k = 0$ haben 1 und 2 Spitzen. Die Koordinaten derselben sind:

$$x'_1 = \pm r(\sqrt{2} + 1), y'_1 = 0, z'_1 = 0;$$

$$x'_2 = \pm r(\sqrt{2} - 1), y'_2 = 0, z'_2 = 0.$$

Ferner hat die Kurve 1 noch vier Spitzen für den Wert $k = 3{,}3205$. Die Koordinaten dieser Spitzen sind:

$x' = + r \cdot 0{,}989, y' = 0, z' = + r \cdot 1{,}128;$
$x' = + r \cdot 0{,}989, y' = 0, z' = - r \cdot 1{,}128;$
$x' = - r \cdot 0{,}989, y' = 0, z' = + r \cdot 1{,}128;$
$x' = - r \cdot 0{,}989, y' = 0, z' = - r \cdot 1{,}128.$

Weitere Punktsingularitäten ergeben sich nicht mehr. Zur genauen Zeichnung müssen wir noch eine Reihe von Punkten bestimmen. Die Koordinaten derselben sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$k = 0{,}1$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 2{,}388, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}418, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 0{,}001, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}0002. \end{cases}$

$k = 0{,}3$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 2{,}198, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}441, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 0{,}040, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}008. \end{cases}$

$k = 0{,}5$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 1{,}934, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}503, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 0{,}148, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}029. \end{cases}$

$k = 0{,}7$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 1{,}672, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}572, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 0{,}307, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}068. \end{cases}$

$k = 0{,}8$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 1{,}557, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}605, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 0{,}393, & z'_2 = 0{,}094. \end{cases}$

$k = 1$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 1{,}374, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}667, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 0{,}557, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}149. \end{cases}$

$k = \sqrt{2}$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 1{,}154, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}769, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 0{,}816, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}272. \end{cases}$

$k = \sqrt{3}$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 1{,}075, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}825, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 0{,}940, & z'_2 = \mp 0{,}359. \end{cases}$

$k = 2$ $\begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 1{,}038, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}860, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 1{,}007, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}423. \end{cases}$

$$k = \sqrt{6} \begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 1{,}008, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}901, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 1{,}074, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}513. \end{cases}$$

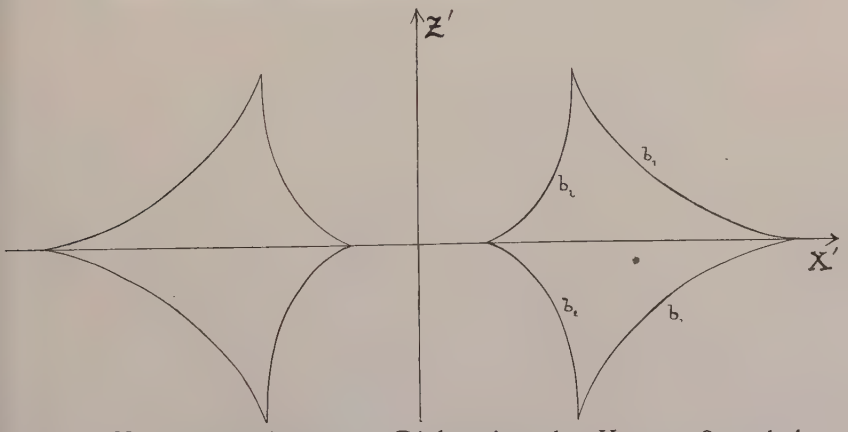
$$k = 3 \begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 0{,}995, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}931, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 1{,}111, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}596. \end{cases}$$

$$k = 4 \begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 0{,}989, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}961, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 1{,}128, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}698. \end{cases}$$

$$k = 6 \begin{cases} x'_1 = \pm r \cdot 0{,}991, & x'_2 = \pm r \cdot 0{,}983, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r \cdot 1{,}115, & z'_2 = \mp r \cdot 0{,}804. \end{cases}$$

$$k = \infty \begin{cases} x'_1 = \pm r, & x'_2 = \pm r, \\ y'_1 = 0, & y'_2 = 0, \\ z'_1 = \pm r, & z'_2 = \mp r. \end{cases}$$

Damit sind hinreichend Punkte bekannt, um den Verlauf der Kurven genau zeichnen zu können. Siehe folgende Figur.



Wir gehen gleich zur Diskussion der Kurven 3 und 4 über. Kombinieren wir die Gleichungen für x' und z', was die Projektionen der Kurven in die (X' Z')-Ebene ergibt, so erhalten wir folgendes Resultat:

$$x'^{2/3} + z'^{2/3} = r^{2/3}.$$

Das ist die Gleichung einer Astroide, welche einem Kreise mit dem Radius r einbeschrieben ist. Wir erkennen

ferner aus früherem, daß die Spitzen dieser Astroide in der Koordinatenebene auf den X′- und Z′-Achsen liegen. Um aber den ganzen Verlauf der Raumkurven zu erhalten, müssen wir auch die Projektionen in die (X′ Y′)-Ebene untersuchen. Der Verlauf dieser Kurven ist regelmäßig, es ergeben sich keine Punktsingularitäten. Die eine Kurve liegt symmetrisch zur anderen. Beide gehen durch den Koordinatenanfangspunkt und besitzen in ihm einen Wendepunkt. Die Konstruktion der Kurven kann mit Hilfe der folgenden Tabelle ausgeführt werden:

$$k = 0 \cdot x'_{3,4} = \pm r,\ y'_{3,4} = \mp r\sqrt{2}.$$

$$k = 0{,}1 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}985 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 1{,}403 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}001 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = 0{,}3 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}878 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 1{,}325 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}023 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = 0{,}5 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}715 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 1{,}192 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}089 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = 0{,}7 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}549 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 1{,}038 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \mp r \cdot 0{,}188 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = 0{,}8 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}476 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 0{,}961 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}243 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = 1 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}353 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 0{,}816 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}351 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = \sqrt{2} \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}192 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r + 0{,}577 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}544 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = \sqrt{3} \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}125 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 0{,}447 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}650 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = 2 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}089 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 0{,}365 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}715 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = \sqrt{6} \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}054 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 0{,}267 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}794 = \pm z'_4. \end{cases}$$

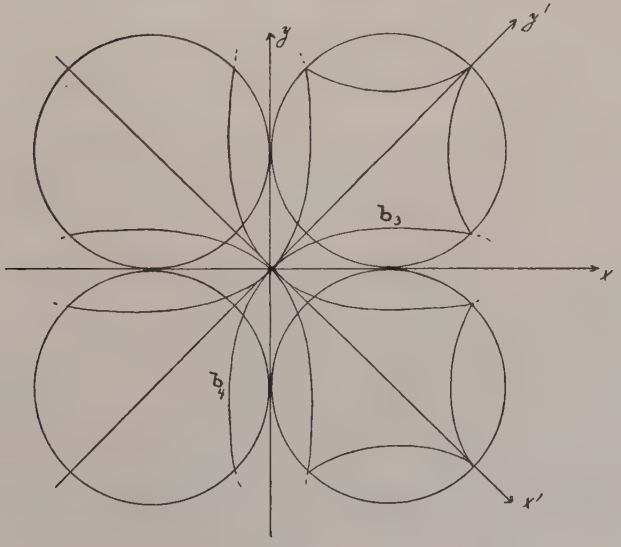
$$k = 3 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}032 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 0{,}191 = \pm y'_4. \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}854 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = 4 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}014 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 0{,}141 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}913 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = 6 \begin{cases} x'_3 = \pm r \cdot 0{,}004 = \pm x'_4, \\ y'_3 = \mp r \cdot 0{,}053 = \pm y'_4, \\ z'_3 = \pm r \cdot 0{,}959 = \pm z'_4. \end{cases}$$

$$k = \infty \cdot \begin{cases} x'_3 = 0 = x'_4, \\ y'_3 = 0 = y'_4, \\ z'_3 = \pm r = \pm z'_4. \end{cases}$$

Vergleiche nachstehende Zeichnung!



Für die (X Z)- und (Y Z)-Ebene erhalten wir dieselben Kurvensysteme.

Nun gilt es den Zusammenhang dieser Kurven sowohl unter sich wie auch mit denen des § 3 und § 2 zu untersuchen.

Suchen wir zunächst den Zusammenhang der Kurven unter sich festzustellen. Damit wir im folgenden die Uebersicht leichter gestalten, damit wir uns leichter zurechtfinden können, wollen wir folgende Abkürzungen einführen: Wir bezeichnen allgemein die Kurven $\varphi \quad 45^0$ mit b. Die Kurve, welche den Koordinaten (x'_1, y'_1, z'_1) entspricht heiße b_1, die den Koordinaten (x'_2, y'_2, z'_2) analog b_2 u. s. w. Ein zweiter Index gebe Aufschluß darüber, ob die Kurven dem Koordinatensystem (O X′ Y′ Z′) angehören, wobei eine Drehung um die Z-Achse ausgeführt wurde, oder dem System (O X″ Y″ Z″), wobei eine Drehung um die X-Achse stattfand, oder endlich dem Koordinatensysteme (O X‴ Y‴ Z‴), wobei um die Y-Achse gedreht wurde. Es sind also b'_1, b'_2, b'_3, b'_4 die Kurven im Koordinatensysteme (O X′ Y′ Z′), b''_1, b''_2, b''_3, b''_4 die des Systems (O X″ Y″ Z″) und b'''_1, b'''_2, b'''_3, b'''_4 die des Systems (O X‴ Y‴ Z‴). Nun ist die Fläche symmetrisch. Es genügt demnach schon, wenn wir in einem Oktanten den Zusammenhang der Kurven bestimmen, denn für die anderen ergeben sich entsprechende Resultate.

Indes kann trotzdem noch nicht behauptet werden, daß die Einführung der obigen Abkürzungen jede Zweideutigkeit ausschließe, wenn wir dieselben gebrauchen. Wohl sind die Kurven b'_1, b''_1, b'''_1, b'_2, b''_2, b'''_2 eindeutig festgelegt, nicht aber die Kurven b'_3, b'_4 etc. Welche der beiden des ersten Oktanten ist b'_3, welche b'_4? Wir bestimmen nun unabhängig von obigen Resultaten: die gegen die X-Achse liegende Kurve sei b'_3, die an der Y-Achse liegende b'_4, b''_3 liege an der Y-Achse, b''_4 an der Z-Achse, b'''_3 an der Z-Achse, b'''_4 an der X-Achse.

Nach diesen Festsetzungen ergeben sich für die gemeinsamen Punkte folgende Resultate:

Zunächst haben die Kurven b'_1, b''_1, b'''_1 einen Punkt gemeinsam und zwar für $k = \sqrt{2}$. Die Koordinaten wurden bereits oben gefunden. Es ist dies der Punkt, welcher der Tangentenebene $u = v = w = \frac{\sqrt{6}}{6r}$ im ursprünglichen Koordinatensystem entspricht. Der Berührungspunkt hat in diesem Koordinatensysteme die Koordinaten $x = y = z = +r \cdot 0{,}816$.

Der Punkt, der sich für $k = \infty$ ergibt, haben, wie wir aus der Tabelle ersehen, die Kurven $(b'_1\ b'_2)$ gemeinsam; durch zyklische Vertauschung ergeben sich für $k = \infty$ gemeinsame Punkte der Kurven $(b''_1,\ b''_2)$ und $(b'''_1,\ b'''_2)$.

Weiter ergibt sich aus der zweiten Tabelle für $k = \infty$ ein gemeinsamer Punkt der Kurven $(b'_3,\ b'_4)$ und entsprechend auch für die Kurven $(b''_3,\ b''_4)$, $(b'''_3,\ b'''_4)$.

Für $k = -2{,}6385$ ergibt sich ein gemeinsamer Punkt der Kurven $(b'_2,\ b''_2,\ b'''_2)$. Seine Koordinaten, bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem, sind: $x = y = z = +r \cdot 0{,}675$.

Ein weiterer gemeinsamer Punkt ergibt sich für die Kurven $(b'_2\ b''_3,\ b'''_4)$ für $|u| = |v| = |w| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2r}\right|$, — ein bereits bekannter Punkt —. Die Koordinaten lauten, bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem: $x = y = \frac{2r\sqrt{6}}{9}, z = \frac{r}{9}\sqrt{6}$.

Analoges gilt für die Kurven $(b''_2,\ b'''_3,\ b'_4)$ und $(b'''_2,\ b'_3,\ b''_4)$. Ihre Koordinaten in dem gemeinsamen Punkte ergeben sich durch zyklische Vertauschung der eben gefundenen Werte.

Endlich haben noch die Kurven $(b'_4,\ b''_3)$, $b''_4,\ b'_3)$, $(b'''_4,\ b'_3)$ je einen Punkt gemeinsam, denn sie liegen symmetrisch zu einander in Bezug auf die Winkelhalbierungsebenen zwischen den Koordinatenebenen und durchdringen die Winkelhalbierungsebenen. Um die Koordinaten dieser Punkte zu finden, überlegen wir folgendes: Damit z. B. die Kurven $(b'''_4,\ b'_3)$ einen Punkt gemeinsam haben, ist nach obigem nur die Bedingung $x = z$ bezogen auf das ursprüng-

liche Koordinatensystem zu erfüllen. Die Gleichungen von b'_3 lauten:

$$x' = \mp \frac{2r}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{k^2+2}}, \quad y' = \pm \frac{r}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}},$$

$$z' = \pm \frac{r k^3}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}}.$$

Transformieren wir diese Gleichungen auf das ursprüngliche Koordinatensystem, so erhalten wir als Bedingung, wenn wir $x = z$ setzen:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{2(2k^3+k^2)}{2k^2+1} - 1 = 0.$$

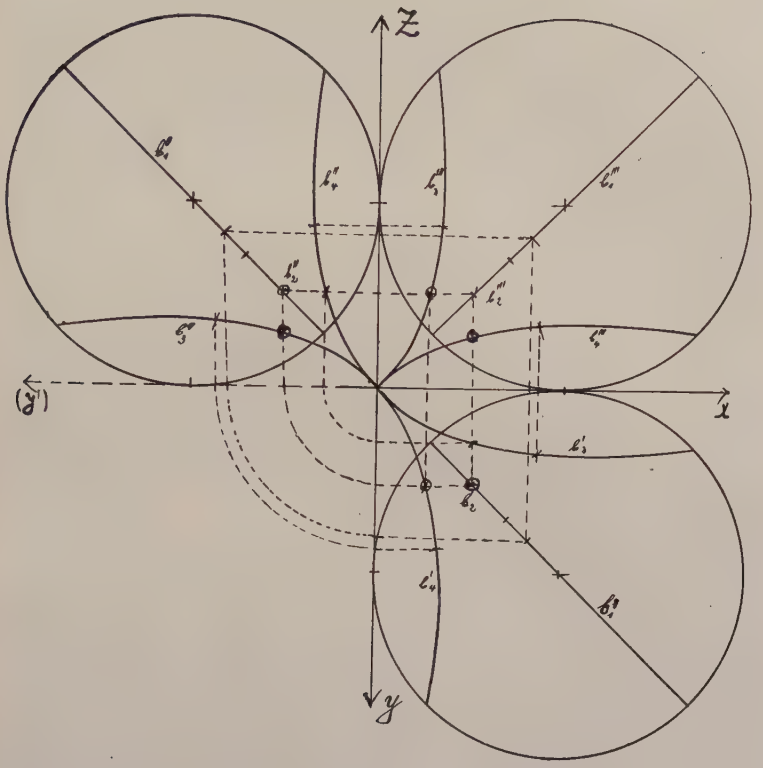
Diese Gleichung ist erfüllt für $k = -0{,}678$. Die entsprechenden Werte von x, y, z sind:

$$x = z = r \cdot 0{,}332, \quad y = r \cdot 0{,}863.$$

Damit wäre der Zusammenhang der Kurven unter einander erledigt.

Der Zusammenhang der Kurven mit den Astroiden und den Kreisen ist rasch klar gestellt. Es zeigt sich, daß die Kurven nur für $k = \infty$ einen Punkt mit den Astroiden gemeinsam haben und zwar kommen dabei nur die Kurven b'_1, b'_2, b''_1, b''_2, b'''_1, b'''_2 in betracht. Der Punkt, welcher b'_1 mit b'_2 gemeinsam ist, liegt auf der Astroide. Er hat die Koordinaten: $x = y = r\sqrt{2}$, $z = +r$. Die beiden anderen Punkte der Kurven $(b''_1\ b''_2)$, (b'''_1, b'''_2), mit den Astroiden erhalten wir durch zyklische Vertauschung der gefundenen Koordinaten. Für $k = 0$ ergibt sich der Zusammenhang mit den Kreisen; jede Kurve hat einen Punkt mit einem der Kreise gemeinsam. Die Koordinaten sind oben aus der Tabelle zu ersehen.

Für die nachfolgende Zeichnung, aus welcher der Zusammenhang der Kurven ersichtlich ist, sei bemerkt, daß nur die Projektionen derjenigen Kurven in die Koordinatenebenen eingezeichnet sind, welche auf den Koordinatenebenen stehen oder, wenn man so sagen will, es sind nur erste Projektionen gezeichnet.



§ 5. Die Kurven $\varphi = 30^0$.

Für $\varphi = 30_0$ lauten die Kurvengleichungen:

$$x'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{3\,(k^2\,(k^2+2)+4)}{4\,(k^2+1)\,\sqrt{3\,k^2+12}} + \frac{3\,k^2\,(k^2+2)+4}{4\,(k^2+1)\,\sqrt{3\,k^2+4}} + \frac{1}{k^2+1}\right),$$

$$y'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^2-2}{2\sqrt{k^2+4}} + \frac{3\,k^2+6}{2\sqrt{9\,k^2+12}}\right),$$

$$z'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{9\,k^3}{4\,(k^2+1)\,\sqrt{3\,k^2+12}} + \frac{k^3}{4\,(k^2+1)\,\sqrt{3\,k^2+4}} + \frac{k^3}{k^2+1}\right).$$

Die Gleichungen für x'_2, y'_2, z'_2, u. s. w. ergeben sich, wenn wir die Vorzeichen ändern in bekannter Reihenfolge.

Ein getrenntes Behandeln der einzelnen Kurven ist jetzt nicht mehr möglich. Ein Zusammenfassen wie in § 4 ist ausgeschlossen. Wir behandeln daher die Kurven gleichzeitig neben einander. Auch hier mögen wie im vorigen § Abkürzungen gebraucht werden. Wir bezeichnen diese Kurven allgemein mit c. Die Kurven, welche den Gleichungen x'_1, y'_1, z'_1) entsprechen, seien c_1 u. s. w. Wollen wir nun den Verlauf der Kurven bestimmen, so müssen wir die Projektionen in die Koordinatenebenen betrachten. Es ergeben sich folgende Resultate: Die Projektion von c_1 in die (X′ Z′)-Ebene hat für $k = 3{,}7155$ eine Spitze. Die Koordinaten in ihr sind: $x' = + r \cdot 0{,}847$, $(y' = + r \cdot 0{,}891)$, $z' = + r \cdot 1{,}211$. Die Projektionen von c_1 und c_2 in die (X′ Y′)-Ebene bilden in ihrem gemeinsamen Punkte für $k = \infty$ eine Spitze. Die Koordinaten in diesem Punkte sind: $x' = + r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y' = r$, $(z' = + r) \cdot c_3$ hat in seiner Projektion in die (X′ Z′)-Ebene eine Spitze für $k = 4{,}2478$. Die Koordinaten derselben sind: $x' = - r \cdot 0{,}012$, $(y' = - r \cdot 0{,}130)$, $z' = r \cdot 1{,}147$. Die Projektionen von c_3 und c_4 in die (X′ Y′)-Ebene haben im Koordinatenanfangspunkte Wendepunkte für $k = \infty$. Hier ist $x' = y' = 0$, $[z = r]$. Um eine genaue Vorstellung von dem Verlaufe der Kurven zu erhalten, müssen wir noch eine Reihe von Punkten bestimmen, welche in folgender Tabelle zusammengefaßt sind. Die Einrichtung der Tabelle ist die folgende: Außen links stehen die Werte von k, oben herüber stehen die Bezeichnungen c_1, c_2, c_3, c_4, welche andeuten sollen, daß die Werte in diesen Reihen diesen Kurven angehören. Die Vorzeichen sind allen Werten beigefügt, da nicht immer die gleichen Vorzeichen bestehen bleiben.

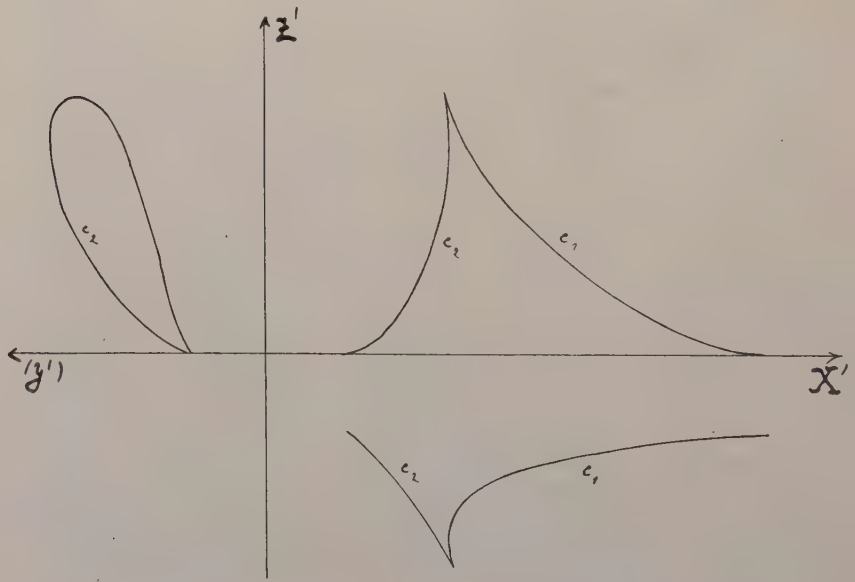
Tabelle der Koordinanten.

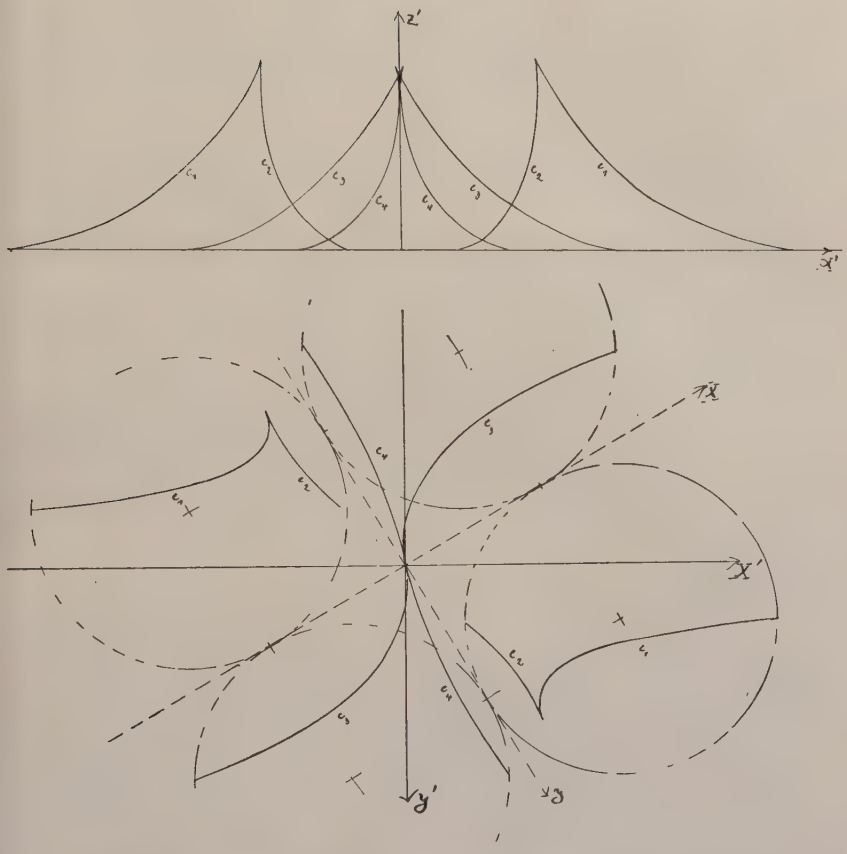
k		c_1	c_2	c_3	c_4
0	x′	$\pm r \cdot 2{,}366$	$\pm r \cdot 0{,}366$	$\pm r \cdot 1{,}366$	$\pm r \cdot 0{,}634$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}366$	$\pm r \cdot 0{,}366$	$\mp r \cdot 1{,}366$	$\pm r \cdot 1{,}366$
	z′	0	0	0	0

k		c_1	c_2	c_3	c_4
	x′	$\pm r \cdot 2{,}339$	$\pm r \cdot 0{,}369$	$\pm r \cdot 1{,}343$	$\pm r \cdot 0{,}627$
0,1	y′	$\pm r \cdot 0{,}368$	$\pm r \cdot 0{,}368$	$\mp r \cdot 1{,}357$	$\pm r \cdot 1{,}357$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}002$	$\mp r \cdot 0{,}0002$	$\pm r \cdot 0{,}001$	$\pm r \cdot 0{,}0005$
	x′	$\pm r \cdot 2{,}265$	$\pm r \cdot 0{,}379$	$\pm r \cdot 1{,}279$	$\pm r \cdot 0{,}607$
0,2	y′	$\pm r \cdot 0{,}375$	$\pm r \cdot 0{,}375$	$\mp r \cdot 1{,}332$	$\pm r \cdot 1{,}332$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}013$	$\mp r \cdot 0{,}002$	$\pm r \cdot 0{,}011$	$\pm r \cdot 0{,}004$
	x′	$\pm r \cdot 2{,}151$	$\pm r \cdot 0{,}394$	$\pm r \cdot 1{,}182$	$\pm r \cdot 0{,}575$
0,3	y′	$\pm r \cdot 0{,}386$	$\pm r \cdot 0{,}386$	$\mp r \cdot 1{,}290$	$\pm r \cdot 1{,}290$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}042$	$\mp r \cdot 0{,}006$	$\pm r \cdot 0{,}036$	$\pm r \cdot 0{,}011$
	x′	$\pm r \cdot 2{,}015$	$\pm r \cdot 0{,}414$	$\pm r \cdot 1{,}063$	$\pm r \cdot 0{,}538$
0,4	y′	$\pm r \cdot 0{,}402$	$\pm r \cdot 0{,}402$	$\mp r \cdot 1{,}239$	$\pm r \cdot 1{,}239$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}090$	$\mp r \cdot 0{,}013$	$\pm r \cdot 0{,}078$	$\pm r \cdot 0{,}025$
	x′	$\pm r \cdot 1{,}868$	$\pm r \cdot 0{,}437$	$\pm r \cdot 0{,}934$	$\pm r \cdot 0{,}497$
0,5	y′	$\pm r \cdot 0{,}420$	$\pm r \cdot 0{,}420$	$\mp r \cdot 1{,}179$	$\pm r \cdot 1{,}179$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}156$	$\mp r \cdot 0{,}023$	$\pm r \cdot 0{,}136$	$\pm r \cdot 0{,}043$
	x′	$\pm r \cdot 1{,}464$	$\pm r \cdot 0{,}512$	$\pm r \cdot 0{,}577$	$\pm r \cdot 0{,}375$
0,8	y′	$\pm r \cdot 0{,}493$	$\pm r \cdot 0{,}493$	$\mp r \cdot 0{,}975$	$\pm r \cdot 0{,}975$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}413$	$\mp r \cdot 0{,}075$	$\pm r \cdot 0{,}363$	$\pm r \cdot 0{,}125$
	x′	$\pm r \cdot 1{,}267$	$\pm r \cdot 0{,}560$	$\pm r \cdot 0{,}399$	$\pm r \cdot 0{,}309$
1	y′	$\pm r \cdot 0{,}536$	$\pm r \cdot 0{,}536$	$\mp r \cdot 0{,}852$	$\pm r \cdot 0{,}852$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}592$	$\mp r \cdot 0{,}115$	$\pm r \cdot 0{,}526$	$\pm r \cdot 0{,}182$
	x′	$\pm r \cdot 1{,}060$	$\pm r \cdot 0{,}628$	$\pm r \cdot 0{,}206$	$\pm r \cdot 0{,}226$
$\frac{4}{3}$	y′	$\pm r \cdot 0{,}615$	$\pm r \cdot 0{,}615$	$\mp r \cdot 0{,}670$	$\pm r \cdot 0{,}670$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}831$	$\mp r \cdot 0{,}193$	$\pm r \cdot 0{,}747$	$\pm r \cdot 0{,}277$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}968$	$\pm r \cdot 0{,}671$	$\pm r \cdot 0{,}118$	$\pm r \cdot 0{,}179$
1,6	y′	$\pm r \cdot 0{,}670$	$\pm r \cdot 0{,}670$	$\mp r \cdot 0{,}554$	$\pm r \cdot 0{,}554$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}964$	$\mp r \cdot 0{,}256$	$\pm r \cdot 0{,}874$	$\pm r \cdot 0{,}345$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}926$	$\pm r \cdot 0{,}697$	$\pm r \cdot 0{,}077$	$\pm r \cdot 0{,}153$
1,8	y′	$\pm r \cdot 0{,}707$	$\pm r \cdot 0{,}707$	$\mp r \cdot 0{,}483$	$\pm r \cdot 0{,}483$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}036$	$\mp r \cdot 0{,}300$	$\pm r \cdot 0{,}945$	$\pm r \cdot 0{,}391$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}898$	$\pm r \cdot 0{,}719$	$\pm r \cdot 0{,}048$	$\pm r \cdot 0{,}131$
2	y′	$\pm r \cdot 0{,}739$	$\pm r \cdot 0{,}739$	$\mp r \cdot 0{,}423$	$\pm r \cdot 0{,}423$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}089$	$\mp r \cdot 0{,}342$	$\pm r \cdot 0{,}999$	$\pm r \cdot 0{,}432$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}864$	$\pm r \cdot 0{,}756$	$\pm r \cdot 0{,}013$	$\pm r \cdot 0{,}095$
$\sqrt{6}$	y′	$\pm r \cdot 0{,}797$	$\pm r \cdot 0{,}797$	$\mp r \cdot 0{,}319$	$\pm r \cdot 0{,}319$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}161$	$\mp r \cdot 0{,}425$	$\pm r \cdot 1{,}077$	$\pm r \cdot 0{,}510$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}850$	$\pm r \cdot 0{,}787$	$\pm r \cdot 0{,}007$	$\pm r \cdot 0{,}068$
3	y′	$\pm r \cdot 0{,}848$	$\pm r \cdot 0{,}848$	$\mp r \cdot 0{,}234$	$\pm r \cdot 0{,}234$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}200$	$\mp r \cdot 0{,}508$	$\pm r \cdot 1{,}123$	$\pm r \cdot 0{,}585$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}850$	$\pm r \cdot 0{,}835$	$\mp r \cdot 0{,}011$	$\pm r \cdot 0{,}026$
5	y′	$\pm r \cdot 0{,}948$	$\pm r \cdot 0{,}948$	$\mp r \cdot 0{,}111$	$\pm r \cdot 0{,}111$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}197$	$\mp r \cdot 0{,}689$	$\pm r \cdot 1{,}144$	$\pm r \cdot 0{,}742$

k		c_1	c_2	c_3	c_4
7	x′	$\pm r \cdot 0{,}856$	$\pm r \cdot 0{,}850$	$\mp r \cdot 0{,}007$	$\pm r \cdot 0{,}013$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}962$	$\pm r \cdot 0{,}962$	$\mp r \cdot 0{,}052$	$\pm r \cdot 0{,}052$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}169$	$\mp r \cdot 0{,}776$	$\pm r \cdot 1{,}130$	$\pm r \cdot 0{,}915$
10	x′	$\pm r \cdot 0{,}860$	$\pm r \cdot 0{,}858$	$\mp r \cdot 0{,}005$	$\pm r \cdot 0{,}007$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}982$	$\pm r \cdot 0{,}982$	$\mp r \cdot 0{,}026$	$\pm r \cdot 0{,}026$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}125$	$\mp r \cdot 0{,}846$	$\pm r \cdot 0{,}997$	$\pm r \cdot 0{,}874$
20	x′	$\pm r \cdot 0{,}864$	$\pm r \cdot 0{,}864$	$\mp r \cdot 0{,}001$	$\pm r \cdot 0{,}002$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}995$	$\pm r \cdot 0{,}995$	$\mp r \cdot 0{,}007$	$\pm r \cdot 0{,}007$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}068$	$\mp r \cdot 0{,}925$	$\pm r \cdot 1{,}053$	$\pm r \cdot 0{,}939$
∞	x′	$\pm r \cdot 0{,}866$	$\pm r \cdot 0{,}866$	0	0
	y′	$\pm r$	$\mp r$	0	0
	z′	$\pm r$	$\mp r$	$\pm r$	$\pm r$

Damit sind hinreichend viele Punkte der Kurven bestimmt, so dass sie nunmehr gezeichnet werden können. Auch hier werden nur die positiven Werte von z berücksichtigt. Vergleiche die folgenden Zeichnungen.





Im Anschlusse an obige Untersuchungen wollen wir die Frage untersuchen, welches die Gestalt der Kurven $\varphi=60^0$ ist. Zu diesem Zwecke bilden wir uns die Kurvengleichungen für $\varphi = 60^0$. Dieselben lauten:

$$x'=\frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{3k^2(k^2+2)+4}{4(k^2+1\sqrt{3k^2+4}}+\frac{3(k^2(k^2+2)+4)}{4(k^2+1)\sqrt{9k^2+12}}+\frac{1}{k^2+1}\right),$$

$$y'=\frac{\mp r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{6k^2+12}{4\sqrt{9k^2+12}}+\frac{2k^2-4}{4\sqrt{k^2+4}}\right),$$

$$z'=\frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^3}{4(k^2+1)\sqrt{3k^2+4}}+\frac{9k^3}{4(k^2+1)\sqrt{3k^2+12}}+\frac{k^3}{k^2+1}\right).$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit den obigen, so finden wir, daß die durch die letzteren Gleichungen darge-

stellten Kurven zu den oben behandelten symmetrisch liegen inbezug auf die Winkelhalbierungsebene zwischen der (XZ)- und (YZ)-Ebene.

Mit den symmetrischen erhalten wir insgesamt acht Raumkurven, von denen wie im vorigen Paragraphen c_1 und c_2, c_3 und c_4 sich zu einer Kurve vereinigen. Indessen behalten wir auch hier die getrennte Schreibweise bei, da wir die Uebersicht leichter gewinnen können.

Aus Gründen der Symmetrie ergeben sich dieselben Resultate für die (XZ)- und (YZ)-Ebene.

Als weitere Aufgabe ergibt sich nun die, den Zusammenhang aller dieser Kurven sowohl unter sich wie mit denen der §§ 2, 3, 4 festzustellen.

Um uns auch hier leicht zurechtzufinden und auszudrücken, möge folgendes festgestellt werden:

Die Kurven, welche den oben unter c_1, c_2 behandelten entsprechen, mögen c'_1, c'_2 heißen, die dazu symmetrischen c'_{1s}, c'_{2s}; die an der x-Achse im ersten Oktanten liegenden Kurven, deren Gestalt unter c_3, c_4 besprochen wurde, mögen mit c'_3. c'_4, die dazu symmetrischen, an der Y-Achse liegenden mit c'_{3s}, c'_{4s} bezeichnet werden. In Anlehnung an diese Festsetzungen mögen dann die in der (YZ)-Ebene an der Y-Achse liegenden Kurven mit c''_1, c''_2, c''_3, c''_4 und die an der Z-Achse hiezu symmetrisch liegenden mit c''_{1s}, c''_{2s}, c''_{3s}, c''_{4s}, die in der (XZ)-Ebene an der Z-Achse liegenden Kurven mit c'''_1, c'''_2, c'''_3, c'''_4, die hiezu symmetrischen, an der X-Achse liegenden mit c'''_{1s}, c'''_{2s}, c'''_{3s}, c'''_{4s}, bezeichnet werden. Dadurch sind alle Kurven $\varphi = 30^0$ und $\varphi = 60^0$ im ersten Oktanten eindeutig bezeichnet. Es genügt die Untersuchung des ersten Oktanten vollständig aus bereits früher angegebenen Gründen. Wir haben nun ein System von vierundzwanzig Kurven vor uns, in deren Verlauf nun Klarheit gebracht werden muß, indem wir den Zusammenhang dieser Kurven zunächst unter sich festzustellen trachten. Dabei sei nochmals erwähnt, daß die Kurven c_1, c_2 eigentlich eine einzige ergeben, nur der Bequemlichkeit halber

in den Untersuchungen und auch durch die Gleichungen berechtigt, werden sie getrennt untersucht.

Fürs erste wollen wir diejenigen gemeinsamen Kurvenpunkte aufsuchen, in welchen keine gemeinsamen Tangentialebenen existieren, welche also auch nicht als Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangentialebene gefunden werden können.

Schon eine einfache Ueberlegung zeigt, daß die Kurven (c'_1, c'_{1s}), (c''_1, c''_{1s}), (c'''_1, c'''_{1s}) einen gemeinsamen Punkt haben müssen. Diese Kurven durchdringen die Winkelhalbierungsebenen zwischen den Koordinatenebenen und liegen zu einander symmetrisch mit den Winkelhalbierungsebenen als Symmetrieebenen, also müssen sie einen Punkt gemeinsam haben. Die Koordinaten des Punktes finden wir durch die folgende Betrachtung: Sollen die genannten Kurven, z. B. c'_1, c'_{1s} einen gemeinsamen Punkt haben, so ist für diese Kurven zu fordern, daß $x = y$ sei, bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem. Wir müssen also in den Gleichungen für c_1 die Bedingung stellen, daß $x = y$ ist. Hieraus kann dann der Wert von k gefunden werden. Die Forderung $x = y$ ist aber identisch mit der Forderung, daß im Koordinatensystem $(O\,X'\,Y'\,Z')$ $x' = y'$ ctg 15^0 sei. Damit erhalten wir die folgende Bedingung:

$$\frac{k^4\,(3\sqrt{3}-1) - 8\,k^2 - 16}{\sqrt{k^2+4}} + \frac{k^4\,(9-\sqrt{3}) + 24\,k^2 + 16}{\sqrt{3\,k^2+4}} - 4\,(\sqrt{3}-1) = 0.$$

Mit Hilfe der Regula falsi, — dieselbe wird in allen folgenden Untersuchungen, wo es gilt, die Wurzeln näherungsweise zu berechnen, angewendet werden — ergibt sich für k der Wert: 0,63484. Die Koordinaten des Punktes im System

$O\,X'\,Y'\,Z'$	und	$O\,X\,Y\,Z$ sind:
$x'_1 = \pm r \cdot 1{,}674,$		$x = \pm r \cdot 1{,}225,$
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}449,$		$y = \pm r \cdot 1{,}225,$
$z'_1 = \pm r \cdot 0{,}266;$		$z = \pm r \cdot 0{,}266.$

c'_1 hat aber auch einen gemeinsamen Punkt mit c'''_{1s}. Die Bedingung hiefür im System $O\,X\,Y\,Z$ ist: $y = z$, was für k folgende Gleichung nach sich zieht:

$$\frac{k^3\,(9\,k-18)}{\sqrt{3\,k^2+12}}+\frac{(3\,k^2+4)^2-2\,k^3}{\sqrt{3\,k^2+4}}+4\,(1-2\,k^3)=0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $k = 4{,}0855$. Die Koordinaten des gemeinsamen Punktes im System

$O\,X'\,Y'\,Z'$	und	$O\,X\,Y\,Z$ heißen:
$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}847,$		$x = \pm r \cdot 0{,}280,$
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}907,$		$y = \pm r \cdot 1{,}209,$
$z'_1 = \pm r \cdot 1{,}209;$		$z = \pm r \cdot 1{,}209.$

Für c'_2 ergibt sich ein gemeinsamer Punkt mit c''_{2s} aus der Forderung $x = z$ im System $O\,X\,Y\,Z$ oder $x'_2 \cos 30^0 - y'_2 \sin 30 - z'_2 = 0$ im System $O\,X'\,Y'\,Z'$. Als Bedingung ergibt sich hieraus folgende Gleichung für k:

$$\frac{\sqrt{3}\,\left((k^2+4)^2-6\,k^3\sqrt{3}\right)}{\sqrt{k^2+4}}+\frac{3\,k^4-2\sqrt{3}\,k^3}{\sqrt{3\,k^2+4}}+4\,(2\sqrt{3}\,k^3-3)=0.$$

Für $k = -1{,}5486$ wird die Gleichung erfüllt. Die Koordinaten des gesuchten Punktes im Koordinatensystem

$O\,X'\,Y'\,Z'$	und	$O\,X\,Y\,Z$ lauten:
$x'_2 = \pm r \cdot 0{,}663,$		$x = \pm r \cdot 0{,}244,$
$y'_2 = \pm r \cdot 0{,}660,$		$y = \pm r \cdot 0{,}903,$
$z'_2 = \mp r \cdot 0{,}244;$		$z = \mp r \cdot 0{,}244.$

Auch für die Kurven c'_3 und c'_{3s} ergibt sich ein solcher Punkt. Wir erhalten die Bedingungen, wenn wir in den Gleichungen für c_3 fordern, daß im System $O\,X\,Y\,Z$ $x = -y$ sei. Der Wert von k, für welche sich die geforderte Gleichheit von x, y ergibt, wird aus folgender Gleichung erhalten:

$$\frac{3\,k^4\sqrt{3}+(k^2+4)^2}{\sqrt{k^2+4}}-\frac{k^4\sqrt{3}+(3\,k^2+4)^2}{\sqrt{3\,k^2+4}}+4\,(\sqrt{3}+1)=0.$$

Hieraus ergibt sich für k der Wert: $k = 1{,}4368$. Die Koordinaten des Punktes sind sodann im System

$O\,X'\,Y'\,Z'$	und	$O\,X\,Y\,Z$
$x'_3 = \pm r \cdot 0{,}167,$		$x = \pm r \cdot 0{,}455,$
$y'_3 = \mp r \cdot 0{,}662,$		$y = \mp r \cdot 0{,}455,$
$z'_3 = \pm r \cdot 0{,}801;$		$z = \pm r \cdot 0{,}801.$

c'_3 hat aber auch einen Punkt mit c'''_{3s} gemeinsam. Hiefür ist im System O X Y Z $y = z$ zu fordern, was für k die folgende Gleichung ergibt:

$$\frac{k^3 (9k - 18)}{\sqrt{3k^2 + 12}} - \frac{(3k^2 + 4)^2 - 2k^3}{\sqrt{3k^2 + 4}} + 4(1 - 2k^3) = 0.$$

$k = -1{,}01476$ ist eine Wurzel der Gleichung. Für den gemeinsamen Punkt ergeben sich die Koordinatenwerte im System

O X′ Y′ Z′	und	O X Y Z
$x'_3 = \pm r \cdot 0{,}387$,		$x = \pm r \cdot 0{,}757$,
$y'_3 = \mp r \cdot 0{,}844$,		$y = \mp r \cdot 0{,}537$,
$z'_3 = \pm r \cdot 0{,}537$;		$z = \pm r \cdot 0{,}537$.

Für (c'_{4s}, c''_4) ergibt sich als Bedingung für einen gemeinsamen Punkt im System O X Y Z $x = z$ oder im System O X′ Y′ Z′ $x'_4 \cos\varphi - y'_4 \sin\varphi - z'_4 = 0$, was die weitere Bedingung ergibt:

$$-\frac{\sqrt{3}\,((k^2 + 2)^2 - 6k^3\sqrt{3})}{\sqrt{k^2 + 4}} + \frac{k^3 (3k - 2\sqrt{3})}{\sqrt{3k^2 + 4}} + 4(3 - 2k^3\sqrt{3}) = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt für $k = -0{,}93378$. Die Koordinaten des gemeinsamen Punktes sind im System

O X′ Y′ Z′	und	O X Y Z
$x'_4 = \pm r \cdot 0{,}329$,		$x = \pm r \cdot 0{,}162$,
$y'_4 = \pm r \cdot 0{,}893$,		$y = \pm r \cdot 0{,}938$,
$z'_4 = \pm r \cdot 0{,}162$;		$z = \pm r \cdot 0{,}162$.

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen und wenden wir sodann die zyklische Vertauschung an, so erhalten wir folgende Punktgruppen:

$(c'_1\ c'_{1s})$, (c''_1, c''_{1s}), (c'''_1, c'''_{1s});
(c'_1, c'''_{1s}), (c''_1, c'_{1s}), (c'''_1, c''_{1s});
(c'_2, c''_{2s}), (c''_2, c'''_{2s}), (c'''_2, c'_{2s});
(c'_3, c'_{3s}), (c''_3, c''_{3s}), (c'''_3, c'''_{3s});
(c'_3, c'''_{3s}), (c''_3, c'_{3s}), (c'''_3, c''_{3s});
(c'_{4s}, c''_4), (c''_{4s}, c'''_4), (c'''_{4s}, c'_4).

Nun gibt es aber noch eine Reihe von Punkten, in welchen zwei Kurven sich kreuzen und in denen eine ge-

meinsame Tangentialebene der Fläche existiert. Diese gemeinsamen Punkte der Kurven lassen sich als Berührungspunkte der Tangentialebene mit der Fläche bestimmen. Wir wollen nun auch diese Punkte ausfindig machen.

Wir betrachten zuerst die Kurven c_1, c'_{1s}, c''_1, c''_{1s}, c'''_1, c'''_{1s}. Die Kurve c'_1 ist der Ort der Berührungspunkte der Ebenen parallel zur Y′-Achse bei fester Z-Achse und dem Winkel $X'X = 30^0$. Unter diesen Ebenen befindet sich sicher eine, für welche $u = w$, bezogen auf das System OXYZ, ist und ebenso eine, für welche $v = w$ ist. Die zur Kurve c'_1 symmetrische Kurve in bezug auf die Winkelhalbierungsebene zwischen den Koordinaten (YZ) und (XY) ist c''_{1s}. Diese ist der Ort der Berührungspunkte der Erzeugenden unserer Fläche parallel zur Z′-Achse, wenn Winkel $YY' = 60^0$ ist und die X-Achse fest blieb. Unter diesen Tangentenebenen ist sicher auch eine, für die $u = w$ im System OXYZ ist. Der Berührungspunkt dieser Tangentenebene entspricht aber dem für $u = w$ bei c'_1 gefundenen Punkt, d. h. der Berührungspunkt dieser Ebene gehört beiden Kurven an, ist also ein gemeinsamer Punkt. Nun sind aber die Ebenen $u = w$ auch bei den b Kurven. Diese sind ja der Ort der Berührungspunkte von Ebenen, für welche $u = w$ etc. ist. Der Berührungspunkt oben genannter Ebene gehört also auch den b Kurven an. Für $u = w$ ergibt sich für k der Wert: $k = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Die Koordinaten des Punktes sind im System

$OX'Y'Z'$	und	$OXYZ$
$x'_1 = \pm r \cdot 1{,}155,$		$x = \pm r \cdot 0{,}713$
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}574,$		$y = \pm r \cdot 1{,}074,$
$z'_1 = \pm r \cdot 0{,}713,$		$z = \pm r \cdot 0{,}713.$

Der Punkt liegt, wie vorauszusehen war auf b'''_1. Durch ähnliche Ueberlegungen erhalten wir auch einen gemeinsamen Punkt für $u = w$ auf den Kurven c'_2 und c''_4; dieser Punkt liegt gleichzeitig auf der Kurve b'''_4. Seine Koordinaten lauten im System

$O X' Y' Z'$	und	$O X Y Z$
$x'_2 = \pm r \cdot 0{,}593,$		$x = \pm r \cdot 0{,}227,$
$y'_2 = \pm r \cdot 0{,}574,$		$y = \pm r \cdot 0{,}794,$
$z'_2 = \mp r \cdot 0{,}151;$		$z = \mp r \cdot 0{,}151.$

Ebenso ergibt sich ein Punkt für $u = w$ auf den Kurven c'_3 und c''_{3s}. Dieser liegt auch auf b'''_2. Seine Koordinaten sind im System

$O X' Y' Z'$	und	$O X Y Z$
$x'_3 = \pm r \cdot 0{,}295,$		$x = \pm r \cdot 0{,}637$
$y'_3 = \mp r \cdot 0{,}763,$		$y = \mp r \cdot 0{,}513,$
$z'_3 = \pm r \cdot 0{,}637;$		$z = \pm r \cdot 0{,}637.$

Schließlich erhalten wir für $u = w$ noch einen gemeinsamen Punkt der Kurven c'_{4s}, c''_{2s}, der auch der Kurve b'''_3 angehört. Die Koordinaten desselben lauten im System

$O X' Y' Z'$	und	$O X Y Z$
$x'_4 = \pm r \cdot 0{,}266,$		$x = \mp r \cdot 0{,}151,$
$y'_4 = \pm r \cdot 0{,}763,$		$y = \pm r \cdot 0{,}794,$
$z'_4 = \pm r \cdot 0{,}227;$		$z = \pm r \cdot 0{,}227.$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir die den gefundenen Punkten entsprechenden gemeinsamen Punkte der anderen Kurven. Gleichzeitig erhalten wir aber auch den Zusammenhang dieser Kurven mit den b Kurven des vorigen Paragraphen, wie oben bewiesen wurde. Es folge nun noch eine Zusammenstellung sämtlicher durch die letzten Untersuchungen gefundenen gemeinsamen Punkte.

(c'_1, c''_{1s}) auf b'''_1, (c''_1, c'''_{1s}) auf b'_1, (c'''_1, c'_{1s}) auf b''_1;
(c'_2, c''_4) „ b'''_4, (c''_2, c'''_4) „ b'_4, (c'''_2, c'_4) „ b''_4;
(c'_3, c''_{3s}) auf b'''_2, (c''_3, c'''_{3s}) auf b''_2, (c'''_3, c'_{3s}) auf b''_2;
(c'_{4s}, c''_{2c}) „ b'''_3, $(c''_{4s}\, c'''_{2s})$ „ b'_3, (c'''_{4s}, c'_{2s}) „ b''_3.

Nun liegt der Gedanke nahe, in obigen Gruppen eine neue Vertauschung der Akzente vorzunehmen; wir könnten z. B. für (c'_1, c''_{1s}) auch schreiben (c''_1, c'_{1s}). Sind dies auch gemeinsame Kurvenpunkte? Wir können dies ohne weiteres bejahen, denn die Fläche ist ja vollständig symmetrisch. Welches sind nun die Koordinaten dieser Punkte? Stimmen sie mit denen der obigen überein? Darauf ist zu erwidern, daß dies

nicht der Fall ist. Die Koordinaten dieser Punkte erhalten wir, wenn wir für $v = w$ die gemeinsamen Punkte zu bestimmen suchen. Das ist aber nichts anderes, als wenn wir für $k = 2$ setzen. Hiefür finden sich aber die Werte der Koordinaten in der Tabelle. Wir erhalten, wenn wir im übrigen genau wie oben verfahren, als Resultat die folgende Tabelle:

(c'_1, c'''_{1s}) auf b''_1, $(c''_1\ c'_{1s})$ auf b'''_1, (c'''_1, c'_{1s}) auf b'_1;
(c'_2, c'''_{3s}) „ b''_3, (c''_2, c'_{3s}) „ b'''_3, (c'''_2, c''_{3s}) „ b'_3;
(c'_3, c'''_{2s}) „ b''_4, (c''_3, c'_{2s}) „ b'''_4, (c'''_3, c''_{2s}) „ c'_4;
(c'_{4s}, c'''_4) „ b''_2, (c''_{4s}, c'_4) „ b'''_2, (c'''_{4s}, c''_4) „ b'_2.

Vergleichen wir die letzte Zusammenstellung mit der obigen, so zeigt sich, daß die ersten Reihen durch zyklische Vertauschung in einander übergeführt werden können. An die Stelle der zweiten Reihe oben tritt die folgende: (c'_{2s}, c''_3) auf b'''_4, (c''_{2s}, c'''_3) auf b'_4, (c'''_{2s}, c'_3) auf b''_4. Die Koordinaten dieser Gruppe sind aber die zyklisch vertauschten der zweiten Reihe der unteren Gruppe. An die Stelle der zweiten Reihe der unteren Gruppe tritt die folgende:

$c'_{2s}, c'''_{4s})$ auf b''_3, (c''_{2s}, c'_{4s}) auf b'''_3, (c'''_{2s}, c''_{4s}) auf b'_3.

Die Koordinaten dieser Punkte sind nun wieder die der zyklisch vertauschten der zweiten Reihe der oberen Gruppe. Die dritten Reihen sind auch nicht durch zyklische Vertauschung aus einander zu gewinnen, sondern es entsprechen sich wie in den zweiten Reihen die vierte Reihe der oberen Gruppe und die dritte in der unteren Gruppe in den Koordinaten. An die Stelle der vierten Reihe der oberen Gruppe tritt die folgende:

(c'_{3s}, c''_2) auf b'''_3, (c''_{3s}, c'''_2) auf b'_3, (c'''_{3s}, c'_2) auf b''_3 ·

An die Stelle der dritten Reihe der unteren Gruppe tritt endlich die folgende:

(c'_4, c'''_2) auf b''_4, (c''_4, c'_2) auf b'''_4, (c'''_4, c''_2) auf b'_4 ·

Damit haben wir aber auch gleichzeitig den Zusammenhang dieser Kurven mit den Kurven b des vorigen Paragraphen erledigt.

Mit diesen Untersuchungen ist jedoch der Zusammenhang dieser Kurven unter einander noch nicht erschöpft.

Weitere gemeinsame Kurvenpunkte, in denen nur eine Tangentialebene der Fläche existiert, liefert folgende Ueberlegung:

Unter den Ebenen parallel zur Y′-Achse im Koordinatensystem O X′ Y′ Z′ bei fester Z-Achse und Winkel (X′ X) $= 30^0$ findet sich eine Ebene, die auch parallel ist zur Y″-Achse im Koordinatensystem O X″ Y″ Z″ bei fester X-Achse und Winkel (Y Y″) $= 30^0$ oder Winkel (X Y″) $= 60^0$; ebenso auch eine parallel zur X‴-Achse im Koordinatensystem O X‴ Y‴ Z‴ bei fester Y-Achse und Winkel (Z Z‴) $= 30^0$ oder Winkel (Z Z‴) $= 60^0$. Während sich bei den Winkeln (Y Y″) $= 30^0$ und Winkel (Z Z‴) $= 60^0$ keine neuen Tangentenebenen finden, die nicht schon behandelt wären, — dies sind ja die Ebenen, die unter u = w, v = w schon gefunden wurden, erhalten wir bei den beiden anderen Winkeln neue Ebenen, deren Berührungspunkte mit der Fläche gleichzeitig gemeinsame Kurvenpunkte sind.

Um verhältnismäßig schnell zum Ziele zu kommen, führen wir ein neues schiefwinkliges Koordinatensystem ein, das mit dem alten den Anfangspunkt gemeinsam hat und dessen Achsen mit denen des ursprünglichen Koordinatensystems die Winkel bilden:

$\sphericalangle (X' X) = \varphi$, $\sphericalangle (X' Y) = 90^0 - \varphi$, $\sphericalangle (X' Z) = 90^0$;
$\sphericalangle (Y' X) = 90^0 + \varphi$, $\sphericalangle (Y' Y) = \varphi$, $\sphericalangle (Y' Z) = 90^0$;
$\sphericalangle (Z' X) = 90^0$, $\sphericalangle (Z' Y) = \alpha$, $\sphericalangle (Z' Z) = 90^0 - \alpha$.

Die Transformationsformeln lauten sodann:

$$u = u'' \cos\varphi - v'' \sin\varphi,$$
$$v = u'' \sin\varphi + v'' \cos\varphi,$$
$$w = \frac{1}{\sin\alpha}\left(w'' - (u'' \sin\varphi \cos\alpha + v'' \cos\varphi \cos\alpha)\right)$$

Die Gleichungen des Berührungspunktes einer Ebene, welche sowohl zur Y″-Achse wie zur Z″-Achse parallel ist lauten in diesem System:

$$x'' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}}\left(\frac{\cos\varphi\,(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\,(\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)}{(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin\varphi\,(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)}{(1 + \sin^2\varphi \operatorname{cotg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}}\right)$$

$$-\frac{1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\,\sin\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}{1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}\Big)$$

$$=\frac{\pm r}{\sqrt{1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\Big(\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2\alpha}$$

$$+\sin\varphi\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}-\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$$

$$=\frac{\pm r\sin\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}}\Big(\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}+\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}-\mathrm{tg}\,\alpha\Big)$$

$$y''=\frac{\pm r}{\sqrt{1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\cdot$$

$$\Big(\sin\varphi\,\Big[\frac{(\cos 2\varphi+\cos 2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\,(1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)}{(1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}$$

$$-\frac{\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha\,(\sin^2\varphi+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)}{\sqrt{\quad}}\Big]$$

$$+\cos\varphi\,\Big[\frac{(\cos 2\varphi+2\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\,(1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)}{(1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}$$

$$-\frac{\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)}{\quad}\Big]$$

$$-\frac{\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\Big);$$

$$z''=\frac{\pm r}{\sqrt{1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\Big(\frac{-\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha(1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}$$

$$-\frac{\sin^4\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha\,(1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha\,(1+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}\Big).$$

Nun hat obiges Koordinatensystem den Nachteil, daß es schiefwinklig ist. Die Koordinatenwerte, welche wir hier erhalten, müßten wir alle erst wieder umrechnen, um sie eintragen zu können, da sie nicht in die zu Anfang des Paragraphen aufgestellte Tabelle passen. Wir transformieren daher auf das dortige Koordinatensystem O′ X′ Y′ Z′ bei fester Z-Achse. Wir erhalten dann für x′, y′, z′ die folgenden Gleichungen:

a)
$$x' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \cdot$$
$$\left(\frac{\cos\varphi\,((1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)(\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha) - \sin^2\varphi \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)}{(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \right.$$
$$+ \frac{\sin\varphi\,((1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha) - \sin^4\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}{(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}}$$
$$\left. - \frac{\sin^3\varphi \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha} \right);$$
$$y' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \cdot$$
$$\left(\frac{\sin\varphi\,((\cos 2\varphi + \cos 2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha) -}{(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \right.$$
$$\leftarrow \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha (\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha) - \cos^4\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha$$
$$+ \frac{\cos\varphi\,((\cos 2\varphi + 2\sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha) -}{(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \rightarrow$$
$$\left. \leftarrow \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha) - \sin^4\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha \right);$$
$$z' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \left(\frac{-\sin\varphi \cos^3\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}{(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \right.$$
$$\left. - \frac{\sin^4\varphi \operatorname{ctg}\alpha}{(1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} + \frac{1}{1 + \sin^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha} \right).$$

Für $\varphi = 30^0$, $\alpha = 60^0$ erhalten wir unter Berücksichtigung der Vorzeichen die folgenden Wertetripel für x', y', z':
$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}847$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}804$, $x'_3 = \mp r \cdot 0{,}010$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}052$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}878$, $y'_2 = \pm r \cdot 0{,}878$, $y'_3 = \mp r \cdot 0{,}185$, $y'_4 = \pm r \cdot 0{,}185$,
$z'_1 = \pm r \cdot 1{,}210$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}564$; $z'_3 = \pm r \cdot 1{,}140$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}634$.

Behalten wir wie oben die Kurvenbezeichnungen bei, so erhalten wir bei gleichzeitiger zyklischer Vertauschung die folgenden Punktegruppen:
(c'_1, c''_1), (c''_1, c'''_1), (c'''_1, c'_1); (c'_{1s}, c'''_{1s}), (c''_{1s}, c'_{1s}), (c'''_{1s}, c''_{1s});
(c'_2, c''_2), (c''_2, c'''_2), (c'''_2, c'_2); (c'_{2s}, c'''_{2s}), (c''_{2s}, c'_{2s}), (c'''_{2s}, c''_{2s});
(c'_3, c''_{4s}), (c''_3, c'''_{4s}), (c'''_3, c'_{4s}); (c'_{3s}, c'''_4), (c''_{3s}, c'_4), (c'''_{3s}, c''_4);
(c'_4, c'''_{2s}), (c''_4, c'_{2s}), (c'''_4, c''_{2s}); (c'_{4s}, c''_2), (c''_{4s}, c'''_2), (c'''_{4s}, c'_2).

Die rechten Seiten sind die zu den linken Seiten symmetrischen, wobei die Winkelhalbierungsebenen zwischen den Koordinatenebenen die Symmetrieebenen sind. Die Koor-

dinaten der Punkte der rechten Seite erhält man, indem man, zunächst die X- und Y-Werte der Koordinaten im System O X Y Z der ersten Reihe links unter sich vertauscht und dann zyklisch weiter geht.

Wir führen nun eine neue Koordinatentransformation aus. Wir transformieren wieder das ursprüngliche Koordinatensystem in ein schiefwinkliges, wobei die neuen Achsen mit den alten die folgenden Winkel bilden:

$\sphericalangle (X X') = \varphi$, $\sphericalangle (X Y') = 90^0 + \varphi$, $\sphericalangle (X Z') = \alpha$;
$\sphericalangle (Y X') = 90^0 - \varphi$, $\sphericalangle (Y Y') = \varphi$, $\sphericalangle (Y Z') = 90^0$;
$\sphericalangle (Z X') = 90^0$, $\sphericalangle (Z Y') = 90^0$, $\sphericalangle (Z Z') = 90^0 - \alpha$;

Die Transformationsformeln lauten:

$$u = u'' \cos\varphi - v'' \sin\varphi,$$
$$v = u'' \sin\varphi + v'' \cos\varphi,$$
$$w = \frac{1}{\sin\alpha}\left(w'' - (u'' \cos\varphi \cos\alpha - v'' \sin\varphi \cos\alpha)\right).$$

Die Gleichungen des Berührungspunktes einer Ebene parallel zur Y''- und Z''-Achse lauten:

$$x'' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \cdot$$
$$\left(\frac{\cos\varphi\,(1 + \cos^2\varphi \operatorname{cotg}^2\alpha)\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)}{(1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}}\right.$$
$$+ \frac{\sin\varphi\,(1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\,(\cos^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)}{(1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}}$$
$$\left. - \frac{\cos\varphi \operatorname{ctg}\alpha\,(1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)}{1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}\right)$$
$$= \frac{\pm r \cos\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}}\left(\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha} + \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha\right).$$

$$y'' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}} \cdot$$
$$\left(\frac{\sin\varphi\,((\cos 2\varphi - 2\cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\,(1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)}{(1 + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha}}\right.$$
$$\left. + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{ctg}^2\alpha)\right)$$

$$+\frac{\cos\varphi\,\{(\cos 2\varphi+\cos 2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)}{(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha\,(\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\}}{+\dfrac{\sin\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}{1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\Big).$$

$$z''=\frac{\pm r}{\sqrt{1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\cdot$$

$$\Big(-\frac{\cos^4\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha\,(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}$$

$$-\frac{\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha\,(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha\,(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{cotg}^2\alpha)}\Big).$$

Wir transformieren nun wieder auf das System OX′Y′Z′ bei fester Z-Achse. In diesem System lauten die Gleichungen des Berührungspunktes:

b) $$x'=\frac{\pm r}{\sqrt{1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\cdot$$

$$\Big(\frac{\cos\varphi\,\{(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)-\cos^4\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha\}}{(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}$$

$$+\sin\varphi\,\{(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)(\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\rightarrow$$

$$\leftarrow-\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\}$$

$$-\frac{\cos^3\varphi\,\mathrm{ctg}^3\alpha}{1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}\Big);$$

$$y'=\frac{\pm r}{\sqrt{1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\cdot$$

$$\Big(\frac{\sin\varphi\,\{(\cos 2\varphi-2\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha\cdot}{(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\rightarrow$$

$$\leftarrow\cdot(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)+\cos^4\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\}$$

$$+\frac{\cos\varphi\,\{(\cos 2\varphi+\cos 2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)}{(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\rightarrow$$

$$\leftarrow+\sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha\,(\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\varphi)+\sin^4\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\}\Big);$$

$$z' = \frac{\pm r}{\sqrt{1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\left(-\frac{\cos^4\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{(1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha)\sqrt{\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}+\frac{1}{1+\cos^2\varphi\,\mathrm{ctg}^2\alpha}\right).$$

Setzen wir $\varphi = 30^0$, $\alpha = 30^0$, so erhalten wir, wenn wir noch gleichzeitig die Vorzeichen berücksichtigen, die folgenden Wertetripel für x', y', z':

$x'_1 = \pm r \cdot 1{,}631$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}478$, $x'_3 = \pm r \cdot 0{,}725$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}427$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}456$, $y'_2 = \pm r \cdot 0{,}456$, $y'_3 = \mp r \cdot 1{,}070$, $y'_4 = \pm r \cdot 1{,}070$,
$z'_1 = \pm r \cdot 0{,}294$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}047$; $z'_3 = \pm r \cdot 0{,}257$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}084$.

Auf Grund der früheren Bezeichnungen und durch zyklische Vertauschung ergeben sich die folgenden Punktegruppen:
(c'_1, c'''_1), (c''_1, c'_1), (c'''_1, c''_1); (c'_{1s}, c''_{1s}), (c''_{1s}, c'''_{1s}) (c'''_{1s}, c'_{1s});
$c'_2, c'''_{4s})$, (c''_2, c'_{4s}), (c'''_2, c''_{4s}); (c'_{2s}, c''_4), (c''_{2s}, c'''_4), (c'''_{2s}, c'_4);
(c'_3, c'''_2), (c''_3, c'_2), (c'''_3, c''_2); (c'_{3s}, c''_{2s}), (c''_{3s}, c'''_{2s}), (c'''_{3s}, c'_{2s});
(c'_4, c''_{3s}), (c''_4, c'''_{3s}), (c'''_4, c'_{3s}); (c'_{4s}, c'''_3), (c''_{4s}, c'_3), (c'''_{4s}, c''_3).

Nun hätten wir alle Punkte dieses Kurvensystems, die den Zusammnnhang der Kurven unter sich herstellen, gefunden.

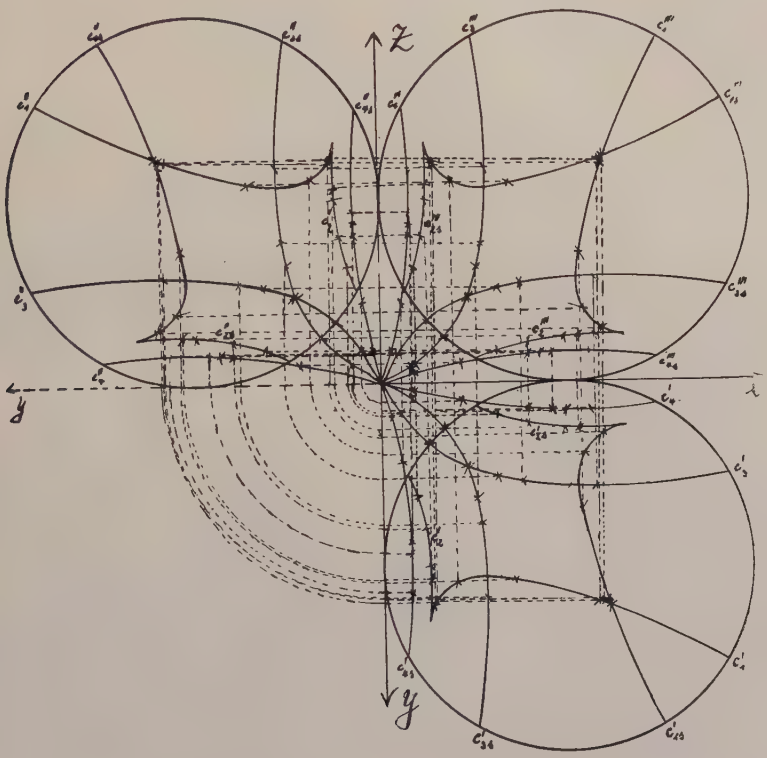
Es wäre nun nur noch der Zusammenhang dieser Kurven mit den Kreisen und den Astroiden zu untersuchen und klarzustellen. Die Kreise sind die Kurven $k = 0$. Demnach müssen diejenigen Punkte der eben behandelten Kurven, welche sich für $k = 0$ ergeben, den Zusammenhang der Kurven c mit den Kreisen herstellen. Die Koordinaten der Punkte $k = 0$ sind aber schon in der Tabelle zu Anfang des Paragraphen berechnet worden, und dortselbst eingetragen.

Der Zusammenhang mit den Astroiden wird durch diejenigen Punkte vermittelt, welche wir erhalten, wenn wir in den Kurvengleichungen $k = \infty$ setzen. Die Koordinatenwerte hierfür finden sich gleichfalls in der Tabelle.

Der Zusammenhang der c-Kurven mit den b-Kurven wurde bereits oben erörtert.

Damit wäre nun der Verlauf, die Lage und der Zusammenhang der Kurven sowohl unter sich wie auch mit den früheren Kurven vollständig bestimmt.

Wie in den vorhergehenden Paragraphen möge auch hier eine Zeichnung den Zusammenhang der Kurven darstellen. Die Zeichnung ist genau so angefertigt, wie im vorhergehenden Paragraphen für die dortigen Kurven.



§ 6. Die Kurven $\varphi = 15^0$.

Die Gleichungen für diese Kurven sind:

$$x'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^2\sqrt{3}-1)\ (k^2+2)+4\ (\sqrt{3}+1)}{4\ (k^2+1)\ \sqrt{k^2\ (\sqrt{3}-1)^2+8}}\right.$$

$$\left. + \frac{k^2\ (\sqrt{3}+1)\ (k^2+2)+4\ (\sqrt{3}-1)}{4\ (k^2+1)\ \sqrt{(k^2\ (\sqrt{3}+1)^2+8}} + \frac{1}{k^2+1}\right);$$

$$y'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{(\sqrt{3}-1)(k^2\sqrt{3}-2)}{2\sqrt{k^2(\sqrt{3}-1)^2+8}} + \frac{k^3(3\sqrt{3}-5)}{2\sqrt{k^2(\sqrt{3}+1)^2+8}}\right);$$

$$z'_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2+1}}\left(\frac{k^3(3\sqrt{3}-5)}{4(k^2+1)\sqrt{k^2(\sqrt{3}-1)^2+8}} + \frac{k^3(3\sqrt{3}-5)}{4(k^2+1)\sqrt{k^2(\sqrt{3}+1)^2+8}} - \frac{k^3}{k^2+1}\right);$$

Aus früheren Bemerkungen können ohne weiteres die obigen Gleichungen in die Gleichungen für x'_2, y'_2 z'_2; x'_3 y'_3 etc. übergeführt werden. Im übrigen verfahren wir hier genau wie im vorigen Paragraphen. Die Kurven werden hier mit d bezeichnet, die Indizierung ist genau die gleiche wie bei den c-Kurven.

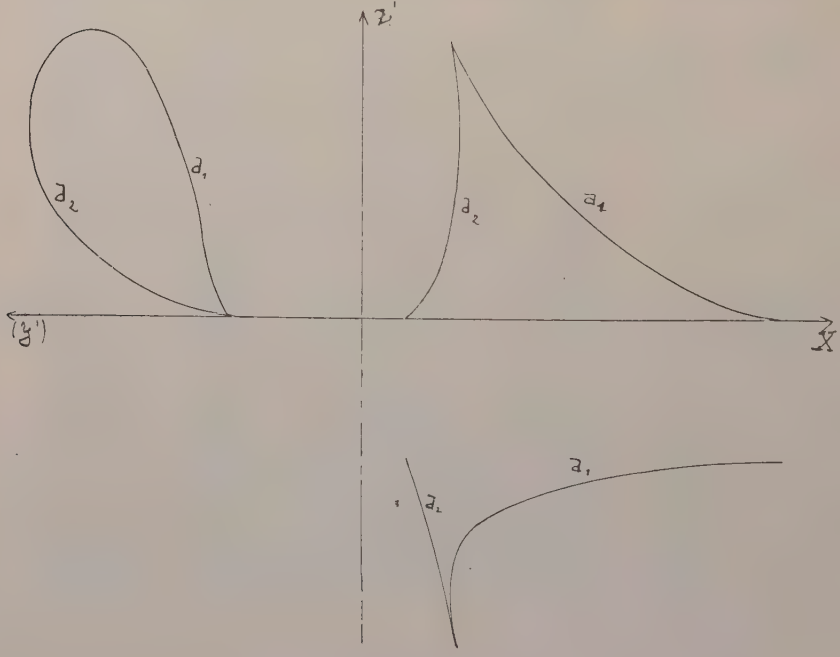
Betrachten wir, zur Feststellung der Gestalt der Kurven, die Projektionen derselben, so zeigt sich, daß die Projektion von d_1 in die (X'Z)-Ebene für $k = 3{,}7994$ eine Spitze hat mit den Koordinaten: $x' = + r \cdot 0{,}458$, $(y' = + r \cdot 1{,}413)$, $z' = + r \cdot 1{,}490$. Die Projektionen von d_1 und d_2 in die (X'Y')-Ebene bilden in dem Punkte ihres Zusammenstoßens eine Spitze für $k = \infty$. Die Koordinaten für diesen Punkt sind: $x' = + r \cdot 0{,}5$, $y' = + r \cdot \sqrt{3}$, $(z' = r)$. Die Kurve d_3 besitzt in ihrer Projektion in die (X'Z)-Ebene eine Spitze für $k = 3{,}8307$ mit den Koordinaten: $x' = - r \cdot 0{,}041$, $(y' = - r \cdot 0{,}329)$, $z' = + r \cdot 1{,}481$. Schließlich haben die Kurven d_3, d_4 im Koordinatenanfangspunkte Wendepunkte in ihren Projektionen in die (X'Y')-Ebene für $k = \infty$. Hiefür sind die Koordinaten $x' = 0$, $y' = 0$, $(z' = r)$. Sonst ist der Verlauf der Projektionen regelmäßig. Wir können nun die Kurven mit jeder beliebigen Genauigkeit zeichnen, wenn wir uns nur hinreichend Punkte verschaffen. Die Resultate für eine Reihe von Werten für k sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Anordnung ist die gleiche, wie im vorigen Paragraphen.

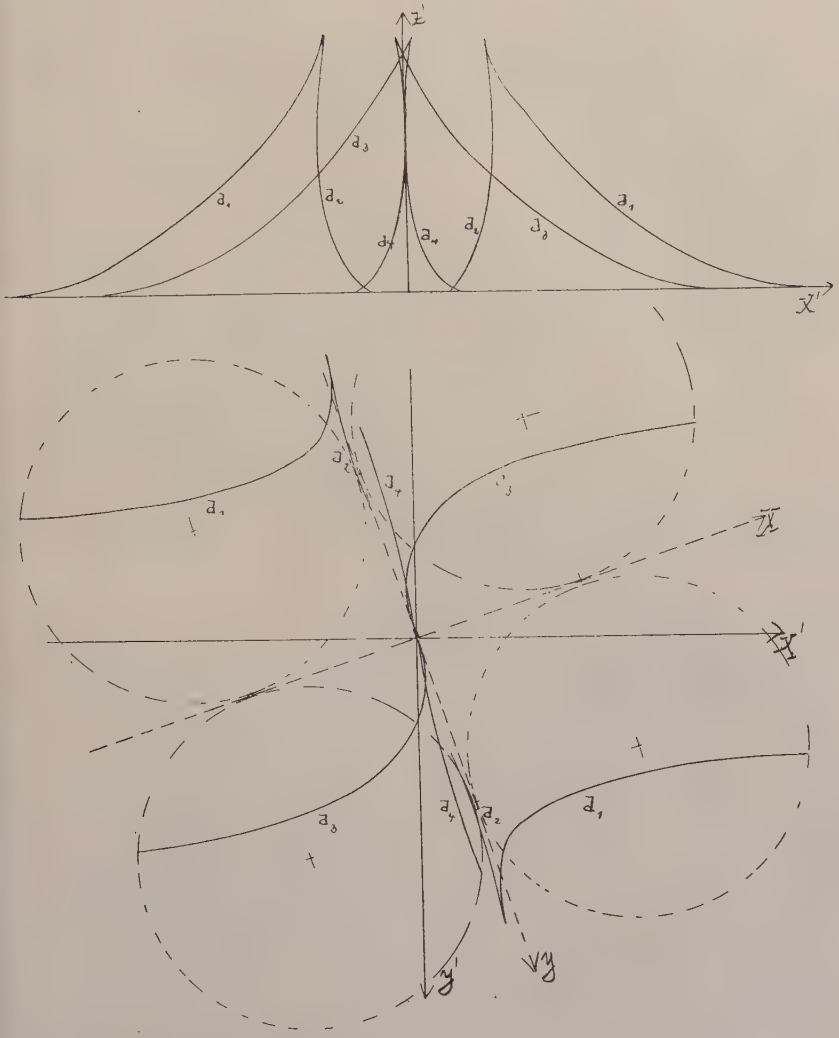
Tabelle der Koordinaten.

k		d_1	d_2	d_3	d_4
0	x′	$\pm r \cdot 2{,}225$	$\pm r \cdot 0{,}225$	$\pm r \cdot 1{,}707$	$\pm r \cdot 0{,}293$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}707$	$\pm r \cdot 0{,}707$	$\mp r \cdot 1{,}225$	$\pm r \cdot 1{,}225$
	z′	0	0	0	0
0,2	x′	$\pm r \cdot 2{,}115$	$\pm r \cdot 0{,}229$	$\pm r \cdot 1{,}600$	$\pm r \cdot 0{,}286$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}715$	$\pm r \cdot 0{,}715$	$\mp r \cdot 1{,}209$	$\pm r \cdot 1{,}209$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}014$	$\mp r \cdot 0{,}001$	$\pm r \cdot 0{,}014$	$\pm r \cdot 0{,}001$
0,3	x′	$\pm r \cdot 1{,}993$	$\pm r \cdot 0{,}236$	$\pm r \cdot 1{,}490$	$\pm r \cdot 0{,}278$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}730$	$\pm r \cdot 0{,}730$	$\mp r \cdot 1{,}186$	$\pm r \cdot 1{,}186$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}045$	$\mp r \cdot 0{,}002$	$\pm r \cdot 0{,}045$	$\pm r \cdot 0{,}003$
0,4	x′	$\pm r \cdot 1{,}843$	$\pm r \cdot 0{,}242$	$\pm r \cdot 1{,}332$	$\pm r \cdot 0{,}269$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}747$	$\pm r \cdot 0{,}747$	$\mp r \cdot 1{,}158$	$\pm r \cdot 1{,}158$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}098$	$\mp r \cdot 0{,}004$	$\pm r \cdot 0{,}096$	$\pm r \cdot 0{,}006$
0,5	x′	$\pm r \cdot 1{,}681$	$\pm r \cdot 0{,}250$	$\pm r \cdot 1{,}172$	$\pm r \cdot 0{,}258$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}766$	$\pm r \cdot 0{,}766$	$\mp r \cdot 1{,}126$	$\pm r \cdot 1{,}126$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}171$	$\mp r \cdot 0{,}008$	$\pm r \cdot 0{,}168$	$\pm r \cdot 0{,}011$
0,6	x′	$\pm r \cdot 1{,}520$	$\pm r \cdot 0{,}259$	$\pm r \cdot 1{,}013$	$\pm r \cdot 0{,}248$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}789$	$\pm r \cdot 0{,}789$	$\mp r \cdot 1{,}091$	$\pm r \cdot 1{,}091$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}260$	$\mp r \cdot 0{,}013$	$\pm r \cdot 0{,}255$	$\pm r \cdot 0{,}167$
0,8	x′	$\pm r \cdot 1{,}228$	$\pm r \cdot 0{,}276$	$\pm r \cdot 0{,}726$	$\pm r \cdot 0{,}226$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}839$	$\pm r \cdot 0{,}839$	$\mp r \cdot 1{,}016$	$\pm r \cdot 1{,}016$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}462$	$\mp r \cdot 0{,}024$	$\pm r \cdot 0{,}456$	$\pm r \cdot 0{,}032$
1	x′	$\pm r \cdot 1{,}001$	$\pm r \cdot 0{,}293$	$\pm r \cdot 0{,}501$	$\pm r \cdot 0{,}207$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}893$	$\pm r \cdot 0{,}893$	$\mp r \cdot 0{,}940$	$\pm r \cdot 0{,}940$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}666$	$\mp r \cdot 0{,}041$	$\pm r \cdot 0{,}658$	$\pm r \cdot 0{,}050$
$\frac{4}{3}$	x′	$\pm r \cdot 0{,}751$	$\pm r \cdot 0{,}319$	$\pm r \cdot 0{,}253$	$\pm r \cdot 0{,}180$
	y′	$\pm r \cdot 0{,}982$	$\pm r \cdot 0{,}982$	$\mp r \cdot 0{,}823$	$\pm r \cdot 0{,}823$
	z′	$\pm r \cdot 0{,}954$	$\mp r \cdot 0{,}070$	$\pm r \cdot 0{,}944$	$\pm r \cdot 0{,}081$
$\sqrt{2}$	x′	$\pm r \cdot 0{,}708$	$\pm r \cdot 0{,}323$	$\pm r \cdot 0{,}210$	$\pm r \cdot 0{,}175$
	y′	$\pm r \cdot 1{,}002$	$\pm r \cdot 1{,}002$	$\mp r \cdot 0{,}800$	$\pm r \cdot 0{,}800$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}008$	$\mp r \cdot 0{,}081$	$\pm r \cdot 0{,}997$	$\pm r \cdot 0{,}092$
$\sqrt{3}$	x′	$\pm r \cdot 0{,}589$	$\pm r \cdot 0{,}339$	$\pm r \cdot 0{,}103$	$\pm r \cdot 0{,}147$
	y′	$\pm r \cdot 1{,}080$	$\pm r \cdot 1{,}080$	$\mp r \cdot 0{,}703$	$\pm r \cdot 0{,}703$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}189$	$\mp r \cdot 0{,}110$	$\pm r \cdot 1{,}178$	$\pm r \cdot 0{,}121$
2	x′	$\pm r \cdot 0{,}538$	$\pm r \cdot 0{,}360$	$\pm r \cdot 0{,}040$	$\pm r \cdot 0{,}138$
	y′	$\pm r \cdot 1{,}140$	$\pm r \cdot 1{,}140$	$\mp r \cdot 0{,}633$	$\pm r \cdot 0{,}633$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}294$	$\mp r \cdot 0{,}138$	$\pm r \cdot 1{,}283$	$\pm r \cdot 0{,}148$
$\sqrt{6}$	x′	$\pm r \cdot 0{,}488$	$\pm r \cdot 0{,}380$	$\mp r \cdot 0{,}010$	$\pm r \cdot 0{,}118$
	y′	$\pm r \cdot 1{,}227$	$\pm r \cdot 1{,}227$	$\mp r \cdot 0{,}534$	$\pm r \cdot 0{,}534$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}402$	$\mp r \cdot 0{,}185$	$\pm r \cdot 1{,}393$	$\pm r \cdot 0{,}195$

k		d_1	d_2	d_3	d_4
	x′	$\pm r \cdot 0{,}465$	$\pm r \cdot 0{,}402$	$\mp r \cdot 0{,}034$	$\pm r \cdot 0{,}097$
3	y′	$\pm r \cdot 1{,}316$	$\pm r \cdot 1{,}316$	$\mp r \cdot 0{,}437$	$\pm r \cdot 0{,}437$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}466$	$\mp r \cdot 0{,}241$	$\pm r \cdot 1{,}457$	$\pm r \cdot 0{,}251$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}464$	$\pm r \cdot 0{,}448$	$\mp r \cdot 0{,}036$	$\pm r \cdot 0{,}051$
5	y′	$\pm r \quad 1{,}511$	$\pm r \cdot 1{,}511$	$\mp r \cdot 0{,}229$	$\pm r \cdot 0{,}229$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}466$	$\mp r \cdot 0{,}420$	$\pm r \cdot 1{,}460$	$\pm r \cdot 0{,}427$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}475$	$\pm r \cdot 0{,}469$	$\mp r \cdot 0{,}024$	$\pm r \cdot 0{,}030$
7	y′	$\pm r \cdot 1{,}601$	$\pm r \cdot 1{,}601$	$\mp r \cdot 0{,}135$	$\pm r \quad 0{,}135$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}395$	$\mp r \cdot 0{,}545$	$\pm r \cdot 1{,}390$	$\pm r \cdot 0{,}550$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}486$	$\pm r \cdot 0{,}484$	$\mp r \cdot 0{,}014$	$\pm r \cdot 0{,}016$
10	y′	$\pm r \cdot 1{,}662$	$\pm r \cdot 1{,}662$	$\mp r \cdot 0{,}073$	$\pm r \cdot 0{,}072$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}323$	$\mp r \cdot 0{,}648$	$\pm r \cdot 1{,}288$	$\pm r \cdot 0{,}683$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}49997$	$\pm r \cdot 0{,}49985$	$\mp r \cdot 0{,}00001$	$\pm r \cdot 0{,}0002$
20	y′	$\pm r \cdot 1{,}727$	$\pm r \cdot 1{,}727$	$\mp r \cdot 0{,}005$	$\pm r \cdot 0{,}005$
	z′	$\pm r \cdot 1{,}170$	$\mp r \cdot 0{,}822$	$\pm r \cdot 1{,}168$	$\pm r \cdot 0{,}824$
	x′	$\pm r \cdot 0{,}5$	$\pm r \cdot 0{,}5$	0	0
∞	y′	$\pm r \cdot 1{,}732$	$\pm r \cdot 1{,}732$	0	0
	z′	$\pm r$	$\mp r$	$\pm r$	$\pm r$

Mit Hilfe der Vorbemerkungen und dieser Tabelle können nunmehr die Kurven gezeichnet werden. Vergleiche folgende Zeichnungen.





Würden wir statt $\varphi = 15$, $\varphi = 75$ setzen, so würden wir die gleichen Kurven erhalten, nur ist ihre Lage zu einander symmetrisch, wie wir es auch bei den Kurven $\varphi = 30^0$ und $\varphi = 60^0$ beobachtet haben. Was dort gesagt wurde gilt auch hier.

Genau wie im vorigen Paragraphen erhalten wir acht Kurven. Die gleichen Resultate erhalten wir auch für die (X Z)- und (Y Z)-Ebene.

Untersuchen wir nun den Zusammenhang dieser Kurven unter sich. Die Kurvenbezeichnung sei analog der Kurven $\varphi = 30^0$. Die Kurvengruppen lauten dann:

d'_1, d'_2, d'_3, d'_4; hiezu symmetrisch: $d'_{1s}, d'_{2s}, d'_{3s}, d'_{4s}$ ·
$d''_1, d''_2, d''_3, d''_4$; „ „ $d''_{1s}, d''_{2s}, d''_{3s}, d''_{4s}$ ·
$d'''_1, d'''_2, d'''_3, d'''_4$; „ „ $d'''_{1s}, d'''_{2s}, d'''_{3s}, d'''_{4s}$ ·

Der hier einzuschlagende Weg zur Feststellung des Zusammenhanges der Kurven ist uns bereits im vorigen Paragraphen vorgezeichnet, sodaß es genügt, kurz die Resultate anzugeben, zumal da auch hier dieselbe Reihenfolge eingehalten wird wie dort. Für einen gemeinsamen Punkt von (d'_1, d'_{1s}) ergibt sich die Bedingung: $y'\sqrt{3} = x'$ oder:

$$\frac{5k^4(\sqrt{3}-1)+8k^2\sqrt{3}-16(k^2+1)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}-1)^2+8}} + \frac{5k^4(\sqrt{3}+1)+8k^2\sqrt{3}+16(k^2+1)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}+1)^2+8}} - 4 = 0.$$

Diese Gleichung ist für k=0,67801 erfüllt. Die Koordinaten des Punktes haben die folgenden Werte im System

O X′ Y′ Z′	und	O X Y Z
$x'_1 = \pm r \cdot 1{,}400,$		$x = \pm r \cdot 1{,}143,$
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}808,$		$y = \pm r \cdot 1{,}143,$
$z'_1 = \pm r \cdot 0{,}336;$		$z = \pm r \cdot 0{,}336.$

Ein weiterer Punkt ist d'_1 gemeinsam mit d'''_{1s}. Die Bedingung hierfür ist $y = z$ im System O X Y Z oder $x'_1 \cdot \sin 15^0 + y'_1 \cos 15^0 - z'_1 = 0$ im System O X′ Y′ Z′. Daraus folgt für k die Gleichung:

$$\frac{k^4 \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)^2 - 4k^3(3\sqrt{3}+5)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}-1)^2+8}} + \frac{\sqrt{2}(k^4(14+8\sqrt{3})+k^2(32+16\sqrt{3}+32)-4k^3(3\sqrt{3}-5)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}+1)^2+8}} + 4(\sqrt{6}-\sqrt{2}) - 16k^3 = 0.$$

k = 1,7563 befriedigt die Gleichung. Wir erhalten für die Koordinaten folgende Werte im System

O X′ Y′ Z′	und	O X Y Z:
$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}588,$		$x = \pm r \cdot 0{,}285,$
$y'_1 = \pm r \cdot 1{,}086,$		$y = \pm r \cdot 1{,}200,$
$z'_1 = \pm r \cdot 1{,}200;$		$z = \pm r \cdot 1{,}200.$

Für einen gemeinsamen Punkt von d'_1 mit d''_{2s} lautet die Forderung im System OXYZ: $x = z$ oder im System OX′Y′Z′: $x'_2 \cos 15 - y'_2 \sin 15^0 - z'_2 = 0$, woraus sich für k folgende Gleichung ergibt:

$$\frac{\sqrt{2}(k^4(14-8\sqrt{3}) + k^2(32-16\sqrt{3}) + 32) - 4k^3(3\sqrt{3}+5)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}-1)^2+8}}$$

$$+ \frac{k^4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2 - 4k^3(3\sqrt{3}-5)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}+1)^2+8}} - 4(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - 16k^3 = 0.$$

Für $k = -1{,}1493$ ist die Gleichung befriedigt. Als Werte der Koordinaten des gemeinsamen Punktes erhalten wir im System

O X′ Y′ Z′	und	O X Y Z:
$x'_2 = \pm r \cdot 0{,}306,$		$x = \pm r \cdot 0{,}054,$
$y'_2 = \pm r \cdot 0{,}933,$		$y = \pm r \cdot 0{,}980,$
$z'_2 = \mp r \cdot 0{,}054;$		$z = \mp r \cdot 0{,}054.$

Weiter ergibt sich ein gemeinsamer Punkt der Kurven d'_3 und d'_{3s}, wenn wir im System OXYZ verlangen, daß $y = x$ werde oder was dasselbe im System OX′Y′Z′, $y'_3 = -x'_3\sqrt{3}$, eine Bedingung, welche für k folgende Gleichung nach sich zieht:

$$\frac{k^4 \cdot 3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) + 4k^2(\sqrt{3}-1)^2 + 16}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}-1)^2+8}}$$

$$- \frac{k^4 \cdot 3\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + 4k^2(\sqrt{3}+1)^2 + 16}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}+1)^2+8}} + 4\sqrt{3} = 0.$$

Es ergibt sich für k der Wert 0,9467 und für die Koordinaten des entsprechenden Punktes im System

O X′ Y′ Z′	und	O X Y Z:
$x'_3 = \pm r \cdot 0{,}554,$		$x = \pm r \cdot 0{,}784,$
$y'_3 = \mp r \cdot 0{,}960,$		$y = \mp r \cdot 0{,}784,$
$z'_3 = \pm r \cdot 0{,}605;$		$z = \pm r \cdot 0{,}605.$

d'_3 hat aber auch noch mit d'''_{3s} einen Punkt gemeinsam. Diesen erhalten wir, wenn wir im System O X Y Z $y = z$ setzen oder im System O X′ Y′ Z′ $x'_3 \sin 15^0 + y'_3 \cos 15^0 - z'_3 = 0$, was für einen Wert von k, welcher der folgenden Gleichung genügt, erfüllt ist:

$$\frac{k^4 \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)^2 - 4k^3(3\sqrt{3}+5)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}-1)^2+8}}$$

$$- \frac{\sqrt{2}\left(k^4(14+8\sqrt{3}) + k^2(32+16\sqrt{3}) + 32\right) - 4k^3(3\sqrt{3}-5)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}+1)^2+8}}$$

$$+ 4(\sqrt{6}-\sqrt{2}) - 16\sqrt{3} = 0.$$

$k = 1{,}1147$ ist ein Näherungswert, für den die Gleichung verschwindet. Als Koordinaten des Punktes ergeben sich im System

O X′ Y′ Z′	und	O X Y Z:
$x'_3 = \pm r \cdot 0{,}399,$		$x = \pm r \cdot 0{,}618,$
$y'_3 = \mp r \cdot 0{,}898,$		$y = \mp r \cdot 0{,}765,$
$z'_3 = \pm r \cdot 0{,}765;$		$z = \pm r \cdot 0{,}765.$

Endlich ergibt sich ein gemeinsamer Punkt für d'_{4s} mit d''_4 aus der Forderung $x = z$ im System O X Y Z oder was dasselbe $x'_4 \cos 15^0 - y'_4 \sin 15^0 - z'_4 = 0$. Für k folgt hieraus die Gleichung:

$$- \frac{\sqrt{2}\left(k^4(14-8\sqrt{3}) + k^2(32-16\sqrt{3}) + 32\right) - 4k^3(3\sqrt{3}+5)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}-1)^2+8}}$$

$$+ \frac{k^4(\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2 - 4k^3(3\sqrt{3}-5)}{\sqrt{k^2(\sqrt{3}+1)^2+8}} - 4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) + 16k^3 = 0.$$

Wir erhalten für k den Wert $-0{,}94195$ und daher als Koordinaten des gemeinsamen Punktes im System

O X′ Y′ Z′	und	O X Y Z:
$x' = \pm r \cdot 0{,}212$		$x = \pm r \cdot 0{,}044$
$y' = \pm r \cdot 0{,}962,$		$y = \pm r \cdot 0{,}984,$
$z' = \pm r \cdot 0{,}044,$		$z = \pm r \cdot 0{,}044.$

Fassen wir die bisher gewonnene Resultate zusammen und vertauschen zyklisch, so erhalten wir folgende Gruppen:

$(d'_1\ d'_{1s})$, (d''_1, d''_{1s}), (d'''_1, d'''_{1s});
(d'_1, d'''_{1s}), (d''_1, d'_{1s}), (d'''_1, d''_{1s});
(d'_2, d''_{2s}), (d''_2, d'''_{2s}), (d'''_2, d'_{2s});
(d'_3, d'_{3s}), (d''_3, d''_{3s}), (d'''_3, d'''_{3s});
(d'_3, d'''_{3s}), (d''_3, d'_{3s}), (d'''_3, d''_{3s});
(d'_{4s}, d''_4), (d''_{4s}, d'''_4), (d'''_{4s}, d'_4).

Aus diesen Gruppen lassen sich teilweise durch neue Zeichenvertauschung neue Punktegruppen ableiten; z. B. aus (d'_2, d''_{2s}) die folgende (d''_2, d'_{2s}). Doch ergibt sich, daß dies kein gemeinsamer Punkt sein kann. Analoges gilt für andere Punktegruppen, die etwa aus obigen abgeleitet werden könnten.

Nunmehr wollen wir diejenigen gemeinsamen Kurvenpunkte aufsuchen, in welchen nur eine gemeinsame Tangentenebene an die Fläche existiert. Die Ueberlegungen, welche hier zum Ziele führen, sind dieselben wie die des vorhergehenden Paragraphen.

Wir fordern zunächst im System OXYZ: $u = w$. Für das System OX′Y′Z′ ist dies erfüllt, wenn $u' - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \cdot w'$ im System OX′Y′Z′ oder $k = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. Wir erhalten einen gemeinsamen Punkt für die Kurven d'_1 und d''_{1s}. Die Koordinaten des Punktes sind im System

OX′Y′Z′	und	OXYZ:
$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}967$,		$x = \pm r \cdot 0{,}701$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}902$,		$y = \pm r \cdot 0{,}122$,
$z'_1 = \pm r \cdot 0{,}701$;		$z = \pm r \cdot 0{,}701$.

Dieser Punkt liegt auch auf der Kurve b'''_1. Weiter erhalten wir unter denselben Bedingungen auch einen gemeinsamen Punkt für die Kurven d'_2 und d''_4 auf b'''_4. Seine Koordinaten im System

OX′Y′Z′	und	OXYZ sind:
$x'_2 = \pm r \cdot 0{,}296$,		$x = \pm r \cdot 0{,}052$
$y'_2 = \pm r \cdot 0{,}902$,		$y = \pm r \cdot 0{,}948$,
$z'_2 = \mp r \cdot 0{,}044$;		$z = \mp r \cdot 0{,}044$.

Ebenso ergibt sich für $u = w$ ein gemeinsamer Punkt der Kurven d'_3 und d''_{3s} auf b'''_3. Die Koordinaten desselben haben folgende Werte im System

$OX'Y'Z'$	und	$OXYZ$:
$x'_3 = \pm r \cdot 0{,}467,$		$x = \pm r \cdot 0{,}691,$
$y'_3 = \mp r \cdot 0{,}927,$		$y = \mp r \cdot 0{,}775,$
$z'_3 = \pm r \cdot 0{,}691;$		$z = \pm r \cdot 0{,}691.$

Endlich ergibt sich auch noch für $u = w$ ein gemeinsamer Punkt für die Kurven d'_{4s} und d''_{2s} auf b'''_3. Er hat die Koordinaten im System

$OX'Y'Z'$	und	$OXYZ$:
$x'_4 = \pm r \cdot 0{,}203,$		$x = \pm r \cdot 0{,}044$
$y'_4 = \pm r \cdot 0{,}927,$		$z = \pm r \cdot 0{,}948,$
$z'_4 = \pm r \cdot 0{,}052,$		$z = \pm r \cdot 0{,}052.$

Vertauschen wir zyklisch, so erhalten wir die gemeinsamen Punkte der entsprechenden Kurven Die sämtlichen vier Punkte fassen wir nun in folgender Tabelle zusammen ebenso die durch zyklische Vertauschung gefundenen:

(d'_1, d''_{1s}) auf b'''_1; (d''_1, d'''_{1s}) auf b'_1; (d'''_1, d'_{1s}) auf b''_1;
(d'_2, d''_4) „ b'''_4; (d''_2, d'''_4) „ b'_4; (d'''_2, d'_4) „ b''_4;
(d'_3, d''_{3s}) „ b'''_2; (d''_3, d'''_{3s}) „ b''_2; (d'''_3, d'_{3s}) „ b''_2;
(d'_{4s}, d''_{2s}) „ b'''_3; $(d''_{4s}\, d'''_{2s})$ „ b'_3; (d'''_{4s}, d'_{2s}) „ b''_3

Setzen wir $v = w$ im System $O\,X\,Y\,Z$ oder was dasselbe $u' = 3{,}8637\ w'$ im System $O\,X'\,Y'\,Z'$, für k also 3,8637, so erhalten wir folgende Resultate:

Es ergibt sich ein gemeinsamer Punkt für d'_1 mit d'''_{1s} auf b''_1 mit den Koordinaten im System

$O\,X'\,Y'\,Z'$	und	$O\,X\,Y\,Z$:
$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}458,$		$x = \pm r \cdot 0{,}075,$
$y'_1 = \pm r \cdot 1{,}419,$		$y = \pm r \cdot 1{,}490,$
$z'_1 = \pm r \cdot 1{,}490;$		$z = \pm r \cdot 1{,}490.$

Ferner ergibt sich ein gemeinsamer Punkt für d'_2 mit d'''_{3s} auf b''_3. Seine Koordinaten sind im System

$O\,X'\,Y'\,Z'$	und	$O\,X\,Y\,Z$:
$x'_2 = \pm r \cdot 0{,}296,$		$x = \pm r \cdot 0{,}052,$
$y'_2 = \pm r \cdot 0{,}902,$		$y = \pm r \cdot 0{,}948,$
$z'_2 = \mp r \cdot 0{,}044,$		$z = \mp r \cdot 0{,}044.$

Die Koordinaten für den gemeinsamen Punkt von d'_3 mit d'''_{2s} auf b''_4, der auch durch obige Bedingungen gefunden wird, sind im System

$OX'Y'Z'$	und	$OXYZ$:
$x'_3 = \mp r \cdot 0{,}041,$		$x = \pm r \cdot 0{,}045,$
$y'_3 = \mp r \cdot 0{,}325,$		$y = \mp r \cdot 0{,}325,$
$z'_3 = \pm r \cdot 1{,}481;$		$z = \pm r \cdot 1{,}481.$

Schließlich ergibt sich auch ein gemeinsamer Punkt der Kurve d'_{4s} mit d'''_4 auf b''_2. Die Werte der zugehörigen Koordinaten sind im System

$OX'Y'Z'$	und	$OXYZ$:
$x'_4 = \pm r \cdot 0{,}073,$		$x = \mp r \cdot 0{,}136,$
$y'_4 = \pm r \cdot 0{,}325,$		$y = \pm r \cdot 0{,}333,$
$z'_4 = \pm r \cdot 0{,}333;$		$z = \pm r \cdot 0{,}333.$

Durch Zusammenfassung und zyklische Vertauschung erhalten wir folgende Punktegruppen:

(d'_1, d'''_{1s}) auf b''_2, $(d''_1\ d'_{1s})$ auf b'''_2, (d'''_1, d'_{1s}) auf b'_2;
(d'_2, d'''_{3s}) „ b''_3, (d''_2, d'_{3s}) „ b'''_3, (d'''_2, d''_{3s}) „ b'_3;
(d'_3, d'''_{2s}) „ b''_4, (d''_3, d'_{2s}) „ b'''_4, (d'''_3, d''_{2s}) „ b'_4;
(d'_{4s}, d'''_4) „ b''_2, (d''_{4s}, d'_4) „ b'''_2, (d'''_{4s}, d''_4) „ b'_2.

Auch hier können wir analog wie bei den gleichen Untersuchungen des vorigen Paragraphen durch neuerliche Vertauschung neue Punktegruppen gewinnen, deren Berechtigung und Richtigkeit ohne weiteres aus den dort angeführten Untersuchungen gefolgert werden kann. Diese Gruppen sind:

(d'_{2s}, d''_3) auf b'''_4, (d''_{2s}, d'''_3) auf b'_4, (d'''_{2s}, d'_3) auf b''_4;
(d'_{2s}, d'''_{4s}) „ b''_3, (d''_{2s}, d'_{4s}) „ b'''_3, (d'''_{2s}, d''_{4s}) „ b'_3;
(d'_{3s}, d''_2) „ b'''_3, (d''_{3s}, d'''_2) „ b'_3, (d'''_{3s}, d'_2) „ b''_3;
(d'_4, d'''_2) „ b''_4, (d''_4, d'_2) „ b'''_4, (d'''_4, d''_2) „ b'_4.

Hiermit sind für $u = w$ und $v = w$ die gemeinsamen Punkte der d Kurven sowohl unter sich wie mit den b Kurven aufgefunden und erledigt,

An diese Untersuchungen schließen sich wieder die gleichen Ueberlegungen wie an der entsprechenden Stelle des vorigen Paragraphen an. Es werden dieselben Formeln die wir dort gefunden haben, auch hier benützt und zwar

genau in der gleichen Reihenfolge wie dort, nur ist stets an die Stelle des Winkels von 30° der Winkel von 15° und an die Stelle des Winkels von 60° ein solcher von 75° zu setzen.

Setzen wir bei den unter a gefundenen Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen $\varphi = 15°$, $\alpha = 75°$, so erhalten wir bei Berücksichtigung der Vorzeichen für die Koordinaten der gemeinsamen Kurvenpunkte die folgenden Werte:

$x'_1 = \pm r \cdot 0.495$, $x'_2 = \pm r \cdot 0,495$, $x'_3 = \mp r \cdot 0,004$, $x'_4 = \pm r \cdot 0,004$,
$y'_1 = \pm r \cdot 1,686$, $y'_2 = \pm r \cdot 1,686$, $y'_3 = \mp r \cdot 1,049$, $y'_4 = \pm r \cdot 0,049$,
$z'_1 = \pm r \cdot 1,224$; $z'_2 = \mp r \cdot 0,761$, $z'_3 = \pm r \cdot 1,224$; $z'_4 = \pm r \cdot 0,761$.

Auf Grund dieser Resultate erhalten wir unter Beachtung der Symmetrie der Fläche folgende Punktegruppen:

(d'_1, d''_1), (d''_1, d'''_1), (d'''_1, d'_1); (d'_{1s}, d'''_{1s}), (d''_{1s}, d'_{1s}), (d'''_{1s}, d''_{1s});
(d'_2, d''_3), (d''_2, d'''_3), (d'''_2, d'_3); (d'_{2s}, d'''_{3s}), (d''_{2s}, d'_{3s}), (d'''_{2s}, d''_{3s});
(d'_3, d''_{4s}), (d''_3, d'''_{4s}), (d'''_3, d'_{4s}); (d'_{3s}, d''_1), (d''_{3s}, d'_1), (d'''_{3s}, d''_4);
(d'_4, d''_{2s}), (d''_4, d'''_{2s}), (d'''_1, d'_{2s}); (d'_{4s}, d'''_2), (d''_{4s}, d'_2), (d'''_{4s}, d''_2).

In den unter b aufgestellten Gleichungen setzen wir $\varphi = 15°$, $\alpha = 15°$ und erhalten dann unter Beachtung der Vorzeichen folgende Werte für die Koordinaten der gemeinsamen Punkte:

$x'_1 = \pm r \cdot 2,024$, $x'_2 = \pm r \cdot 0,235$, $x'_3 = \pm r \cdot 1,508$, $x'_4 = \pm r \cdot 0,282$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0,732$, $y'_2 = \pm r \cdot 0,732$, $y'_3 = \mp r \cdot 1,196$, $y'_4 = \pm r \cdot 1,196$,
$z'_1 = \pm r \cdot 0,037$; $z'_2 = \mp r \cdot 0,002$; $z'_3 = \pm r \cdot 0,036$; $z'_4 = \pm r \cdot 0,036$.

Hieraus und aus der Symmetrie der Fläche ergeben sich die folgenden Punktegruppen:

(d'_1, d'''_1), (d''_1, d'_1), (d'''_1, d''_1); (d'_{1s}, d''_{1s}), (d''_{1s}, d'''_{1s}), (d'''_{1s}, d'_{1s});
(d'_2, d'''_{4s}), (d''_2, d'_{4s}), (d'''_2, d''_{4s}); (d'_{2s}, d''_4), (d''_{2s}, d'''_4), (d'''_{2s}, d'_4);
(d'_3, d'''_2), (d''_3, d'_2), (d'''_3, d''_2); (d'_{3s}, d''_{3s}), (d''_{3s}, d'''_{2s}), (d'''_{3s}, d'_{2s});
(d'_4, d'''_{3s}), (d''_4, d'_{3s}), (d'''_4, d''_{3s}); (d'_{4s}, d''_3), (d''_{1s}, d'''_3), (d'''_{4s}, d'_3).

Nun wäre der Zusammenhang dieser Kurven unter sich klargelegt. Der Kurvenzusammenhang mit den Kreisen ist durch die Koordinatenwerte, welche sich für $k = 0$ ergeben, bestimmt, der mit den Astroiden durch die Koordinatenwerte aus $k = \infty$. Es ist jetzt nur noch der Zusammenhang obiger Kurven mit den Kurven c des vorigen Paragraphen zu untersuchen, was im folgenden geschehen soll.

Wir beziehen alle im folgenden auftretenden Koordinaten auf das Koordinatensystem OX'Y'Z' bei fester Z-Achse und Winkel (X' X) = 30°.

Zuerst behandeln wir die Gleichungen unter a) des vorigen Paragraphen und setzen zunächst $\varphi = 30^0$ und $\alpha = 15^0$. Bei Beachtung der Vorzeichen erhalten wir dann die folgenden Koordinatenwerte:

$x'_1 = \pm r \cdot 1{,}815$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}446$, $x'_3 = \pm r \cdot 0{,}888$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}481$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}427$, $y'_2 = \pm r \cdot 0{,}427$, $y'_3 = \mp r \cdot 1{,}156$, $y'_4 = \pm r \cdot 0{,}160$,
$z'_1 = \pm r \cdot 0{,}183$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}027$; $z'_3 = \pm r \cdot 0{,}160$, $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}051$.

Transformieren wir diese Koordinaten auf das System OX'' Y'' Z'' bei fester X-Achse und Winkel (Y'' Y) = 15° so erhalten wir die Werte für die Kurven d. Beachten wir noch, daß die Fläche symmetrisch ist, so erhalten wir die folgenden Punktegruppen:

(c'_1, d''_{1s}), (c''_1, d'''_{1s}), (c'''_1, d'_{1s}); (c'_{1s}, d'''_1), (c''_{1s}, d'_1), (c'''_{1s}, d''_1);
(c'_2, d''_4), (c''_2, d'''_4), (c'''_2, d'_4); (c'_{2s}, d'''_{4s}), (c''_{2s}, d'_{4s}), (c'''_{2s}, d''_{4s});
(c'_3, d''_{3s}), (c''_3, d'''_{3s}), (c'''_3, d''_{3s}); (c'_{3s}, d'''_3), (c''_{3s}, d'_3), (c'''_{3s}, d''_3);
(c'_4, d''_{2s}), (c''_4, d'''_{2s}), (c'''_4, d'_{2s}); (c'_{4s}, d'''_2), (c''_{4s}, d'_2), (c'''_{4s}, d''_2).

Setzen wir $\varphi = 30^0$, dann erhalten wir die folgenden Koordinatenwerte:

$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}856$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}852$, $x'_3 = \mp r \cdot 0{,}007$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}008$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}958$, $y'_2 = \pm r \cdot 0{,}958$, $y'_3 = \mp r \cdot 0{,}056$, $y'_4 = \pm r \cdot 0{,}056$,
$z'_1 = \pm r \cdot 1{,}156$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}774$; $z'_3 = \pm r \cdot 1{,}119$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}829$.

Hieraus ergeben sich wieder die folgenden Punktegruppen, wobei die rechten Seiten die zu den Winkelhalbierungsebenen als Symmetrieebenen symmetrisch liegenden Punkte sind.

(c'_1, d''_1), (c''_1, d'''_1), (c'''_1, d'_1); (c'_{1s}, d'''_{1s}), (c''_{1s}, d'_{1s}), (c'''_{1s}, d''_{1s});
(c'_2, d''_3), (c''_2, d'''_3), (c'''_2, d'_3); (c'_{2s}, d'''_{3s}), (c''_{2s}, d'_{3s}), (c'''_{2s}, d''_{2s});
(c'_3, d''_{4s}), (c''_3, d'''_{4s}), (c'''_3, d'_{4s}); (c'_{3s}, d'''_4), (c''_{3s}, d'_4), (c'''_{3s}, d''_4);
(c'_{4s}, d''_2), (c''_{4s}, d'''_2), (c'''_{4s}, d'_2); (c'_4, d'''_{2s}), (c''_4, d'_{2s}), (c'''_4, d''_{2s}).

Wir gehen nun zu den Gleichungen b) des vorigen Paragraphen über und setzen $\varphi = 30^0$ und $\alpha = 15^0$. Als Koordinaten der gemeinsamen Punkte in diesem Falle erhalten wir:

$x'_1 = \pm r \cdot 2{,}140$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}390$, $x'_3 = \pm r \cdot 1{,}171$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}573$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}388$, $y'_2 = \pm r \cdot 0.388$, $y'_3 = \mp r \cdot 1{,}287$, $y'_4 = \pm r \cdot 1{,}287$,
$z'_1 = \pm r \cdot 0{,}045$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}006$; $z'_3 = \pm r \cdot 0{,}039$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}022$.

Daraus ergeben sich die folgenden Punktegruppen:

(c'_1, d'''_1), (c''_1, d'_1), (c'''_1, d''_1); (c'_{1s}, d''_{1s}), (c''_{1s}, d'''_{1s}), (c'''_{1s}, d'_{1s});
(c'_2, d'''_{4s}), (c''_2, d'_{4s}), (c'''_2, d''_{4s}); (c'_{2s}, d''_4), (c''_{1s}, d'''_4), (c'''_{1s}, d'_4);
(c'_3, d'''_2), (c''_3, d'_2), (c'''_3, d''_2); (c'_{3s}, d''_{2s}), (c''_{3s}, d'''_{2s}), (c'''_{3s}, d'_{2s});
(c'_{4s}, d'''_3), (c''_{4s}, d'_3), (c'''_{4s}, d''_3); (c'_4, d''_{3s}), (c''_4, d'''_{3s}), (c'''_4, d'_{3s}).

Für $\varphi = 30^0$ und $\alpha = 75^0$ erhalten wir folgende Werte für die Koordinaten:

$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}848$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}825$, $x'_3 = \mp r \cdot 0{,}013$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}035$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}914$, $y'_2 = \pm r \cdot 0{,}914$, $y'_3 = \mp r \cdot 0{,}128$, $y'_4 = \pm r \cdot 0{,}128$,
$z'_1 = \pm r \cdot 1{,}207$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}642$; $z'_3 = \pm r \cdot 1{,}147$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}701$.

Daraus folgen die Punktegruppen:

(c'_1, d'''_{1s}), (c''_1, d'_{1s}), (c'''_1, d''_{1s}); (c'_{1s}, d''_1), (c''_{1s}, d'''_1), (c'''_{1s}, d'_1);
(c'_2, d'''_{3s}), (c''_2, d'_{3s}), (c'''_2, d''_{3s}); (c'_{2s}, d''_3), (c''_{2s}, d'''_3), (c'''_{2s}, d'_3);
(c'_3, d'''_{2s}), (c''_3, d'_{2s}), (c'''_3, d''_{2s}); (c'_{3s}, d''_2), (c''_{3s}, d'''_2), (c'''_{3s}, d'_2);
(c'_{4s}, d'''_{2s}), (c''_{4s}, d'_{2s}), (c'''_{4s}, d''_{2s}); (c'_4, d''_2), (c''_4, d'''_2), (c'''_4, d'_2).

Damit haben wir nun vier Punktegruppen gewonnen, in jeder Gruppe sind vierundzwanzig Punkte enthalten. Wir können aus diesen Gruppen nochmals vier neue Gruppen zu je vierundzwanzig Punkten gewinnen, wenn wir c mit d vertauschen, wenn wir z. B. statt (c', d'') schreiben (d', c''). Dies gibt aber dieselben Resultate, als wenn wir in den Gleichungen zum Aufsuchen gemeinsamer Punkte der Kurven d und c durchgehend für $\varphi = 15^0$ und $\alpha = 30^0$ oder 60^0 setzen, was nun im folgenden gleichfalls durchgeführt werden möge.

Setzen wir zunächst wieder in den Gleichungen a) des vorigen Paragraphen $\varphi = 15^0$ und $\alpha = 30^0$, so erhalten wir in dem Koordinatensystem O X' Y' Z' bei fester Z-Achse und Winkel (X,X')=15° unter Beachtung der Vorzeichen die enden Koordinatenwerte für die gemeinsamen Punkte:

$\cdot 0.508$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}371$, $x'_3 = \pm r \cdot 0{,}010$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}127$,
187, $y'_2 = \pm r \cdot 1{,}187$, $y'_3 = \mp r \cdot 0{,}580$, $y'_4 = \pm r \cdot 0{,}580$,
$\cdot z'_2 = \mp r \cdot 0{,}167$, $z'_3 = \pm r \cdot 1{,}353$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}178$.

Mit diesen Koordinatenwerten sind die folgenden Punktegruppen festgelegt:
$(d'_1, c''_{1s}), (d''_1, c'''_{1s}), (d'''_1, c'_{1s}); (d'_{1s}, c''_1), (d''_{1s}, c'_1), (d'''_{1s}, c''_1);$
$(d'_2, c''_{4s}), (d''_2, c'''_4), (d'''_2, c'_4); (d'_{2s}, c'''_4), (d''_{2s}, c'_4), (d'''_{2s}, c''_4);$
$(d'_3, c''_{3s}), (d''_3, c'''_{3s}), (d'''_3, c'_{3s}); (d'_{3s}, c'''_3), (d''_{3s}, c'_3), (d'''_{3s}, c''_3);$
$(d'_4, c''_{2s}), (d''_4, c'''_{2s}), (d'''_4, c'_{2s}); (d'_{4s}, c'''_2), (d''_{4s}, c'_2), (d'''_{4s}, c''_2).$

Für $\varphi = 15^0$ und $\alpha = 60^0$ erhalten wir folgende Koordinatenwerte in dem genannten System:
$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}437$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}467$, $x'_3 = \mp r \cdot 0{,}026$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}033$,
$y'_1 = \pm r \cdot 1{,}591$, $y'_2 = \pm r \cdot 1{,}591$, $y'_3 = \mp r \cdot 0{,}146$, $y'_4 = \pm r \cdot 0{,}146$,
$z'_1 = \pm r \cdot 1{,}405$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}528$; $z'_3 = \pm r \cdot 1{,}403$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}533$.

Die dazu gehörigen Punktegruppen sind:
$(d'_1, c''_1), (d''_1, c'''_1), (d'''_1, c'_1); (d'_{1s}, c'''_{1s}), (d''_{1s}, c'_{1s}), (d'''_{1s}, c''_{1s});$
$(d'_2, c''_3), (d''_2, c'''_3), (d'''_2, c'_3); (d'_{2s}, c'''_{3s}), (d''_{2s}, c'_{3s}), (d'''_{2s}, c''_{3s});$
$(d'_3, c''_{4s}), (d''_3, c'''_{4s}), (d'''_3, c'_{4s}); (d'_{3s}, c'''_4), (d''_{3s}, c'_4), (d'''_{3s}, c''_4);$
$(d'_{4s}, c''_2), (d''_{4s}, c'''_2), (d'''_{4s}, c'_2); (d'_4, c'''_{2s}), (d''_4, c'_{2s}), (d'''_4, c''_{2s}).$

In den Gleichungen b) erhalten in demselben Koordinatensystem für $\varphi = 15^0$ und $\alpha = 30^0$ die Koordinaten die folgenden Werte:
$x'_1 = \pm r \cdot 1{,}523$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}259$, $x'_3 = \pm r \cdot 1{,}017$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}248$,
$y'_1 = \pm r \cdot 0{,}789$, $y'_2 = \pm r \cdot 0{,}789$, $y'_3 = \mp r \cdot 1{,}092$, $y'_4 = \pm r \cdot 1{,}092$,
$z'_1 = \pm r \cdot 0{,}258$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}012$; $z'_3 = \pm r \cdot 0{,}253$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}017$.

Die durch diese Koordinatenwerte bestimmten Punktegruppen sind:
$(d'_1, c'''_1), (d''_1, c'_1), (d'''_1, c''_1); (d'_{1s}, c''_{1s}), (d''_{1s}, c'''_{1s}) (d'''_{1s}, c'_{1s});$
$(d'_2, c'''_{4s}), (d''_2, c'_{4s}), (d'''_2, c''_{4s}); (d'_{2s}, c''_4), (d''_{2s}, c'''_4), (d'''_{2s}, c'_4);$
$(d'_3, c'''_2), (d''_3, c'_2), (d'''_3, c''_2); (d'_{3s}, c''_{2s}), (d''_{3s}, c'''_{2s}), (d'''_{3s}, c'_{2s});$
$(d'_{4s}, c'''_3), (d''_{4s}, c'_3), (d'''_{4s}, c''_3); (d'_4, c''_{3s}), (d''_4, c'''_{3s}), (d'''_4, c'_{3s}).$

Endlich ergeben sich für $\varphi = 15^0$ und $\alpha = 60^0$ die folgenden Koordinaten:
$x'_1 = \pm r \cdot 0{,}572$, $x'_2 = \pm r \cdot 0{,}348$, $x'_3 = \pm r \cdot 0{,}082$, $x'_4 = \pm r \cdot 0{,}149$,
$y'_1 = \pm r \cdot 1{,}094$, $y'_2 = \pm r \cdot 1{,}094$, $y'_3 = \mp r \cdot 0{,}686$, $y'_4 = \pm r \cdot 0{,}686$,
$z'_1 = \pm r \cdot 1{,}216$; $z'_2 = \mp r \cdot 0{,}113$; $z'_3 = \pm r \cdot 1{,}205$; $z'_4 = \pm r \cdot 0{,}127$.

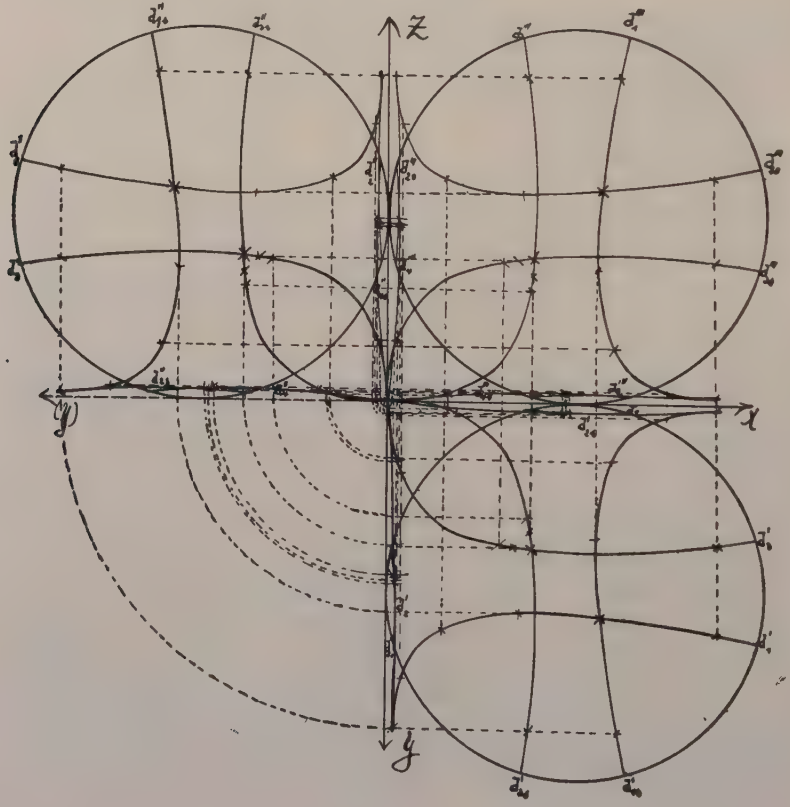
Hierdurch sind noch folgende Punktegruppen gewonnen:
$(d'_1, c'''_{1s}), (d''_1, c'_{1s}), (d'''_1, c''_{1s}); (d'_{1s}, c''_1), (d''_{1s}, c'''_1), (d'''_{1s}, c'_1);$
$(d'_2, c'''_{3s}), (d''_2, c'_{3s}), (d'''_2, c''_{3s}); (d'_{2s}, c''_3), (d''_{2s}, c'''_3), (d'''_{2s}, c'_3);$

$(d'_3, c'''_{2s}), (d''_3, c'_{2s}), (d'''_3, c''_{2s})$; $(d'_{3s}, c''_2), (d''_{3s}, c'''_2), (d'''_{3s}, c'_2)$;
$(d'_{4s}, c'''_{2s}), (d''_{4s}, c'_{2s}), (d'''_{4s}, c''_{2s})$; $(d'_4, c''_2), (d''_4, c'''_2), (d'''_4, c'_2)$.

Nunmehr können wir die Untersuchungen über den Zusammenhang der Kurven sowohl unter sich, wie mit den früher behandelten, schließen. Es sind alle gemeinsamen Punkte bestimmt, sodaß der Zusammenhang der Kurven vollständig klar ist. Gleichzeitig ist aber auch die gegenseitige Lage der Kurven im Raume unzweifelhaft festgelegt und damit die Gestalt der Fläche schon fast eindeutig bestimmt.

In nachfolgender Zeichnung sind die gemeinsamen Punkte der d Kurven in ähnlicher Weise wie bei den früheren Kurven eingetragen.

Wir schließen damit auch die Untersuchungen über die Kurven $\varphi = 15^0$.



§ 7. Ort der Berührungspunkte der Tangentenebenen parallel zur Schnittgeraden der Winkelhalbierungsebenen zwischen den Koordinatenebenen.

Für diese Untersuchungen wählen wir folgendes Achsensystem: die ursprüngliche X- und Y-Achse bleibe erhalten. Als neue Z-Achse werde die Schnittgerade der Winkelhalbierungsebenen zwischen den Koordinatenebenen angenommen. Die Richtungskosinusse dieser Geraden sind: $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, wobei α, β, γ die mit den Koordinatenachsen des alten Koordinatensystems gebildeten Winkel sind. Die Transformationsformeln lauten:

$$u = u', \qquad x = x' + \frac{z'}{3}\sqrt{3},$$

$$v = v', \qquad y = y' + \frac{z'}{3}\sqrt{3},$$

$$w = w'\sqrt{3} - u' - v'. \qquad z = z' \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Die transformierte Flächengleichung lautet:

$$r\Big(u'\sqrt{v'^2 + (w'\sqrt{3} - u' - v')^2} + v'\sqrt{u'^2 + (w'\sqrt{3} - u' - v')^2} + (w'\sqrt{3} - u' - v')\sqrt{u'^2 + v'^2}\Big) - t'\sqrt{u'^2 + v'^2 + (w'\sqrt{3} - u' - v')^2} = 0.$$

Die Gleichungen des Berührungspunktes einer Tangentenebene $(u'_0, v'_0, 0)$, also einer Ebene parallel zur Z'-Achse sind:

$$x' = \frac{\pm r}{\sqrt{u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + (u'_0 + v'_0)^2}} \cdot \left(\frac{u'_0\,(u'_0 + v'_0) + (u'_0 + v'_0)^2 + v'_0{}^2}{\sqrt{v'_0{}^2 + (u'_0 + v'_0)^2}} + \frac{v'_0\,(2\,u'_0 + v'_0)}{\sqrt{u'_0{}^2 + (u'_0 + v'_0)^2}} - \frac{(u'_0{}^2 + v'_0{}^2) + u'_0\,(u'_0 + v'_0)}{\sqrt{u'_0{}^2 + v'_0{}^2}} - \frac{2\,u'_0 + v'_0}{r\sqrt{u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + (u'_0 + v'_0)^2}}\right)$$

$$y' = \frac{\pm r}{\sqrt{u'_0{}^2 + v'_0{}^2 + (u'_0 + v'_0)^2}} \cdot$$

$$\left(\frac{u'_0\,(2\,v'_0+u'_0)}{\sqrt{v'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}}+\frac{u'^2_0+v'_0\,(u'_0+v'_0)+(u'_0+v'_0)^2}{\sqrt{u'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{u'^2_0+v'_0\,(u'_0+v'_0)+v'^2_0}{\sqrt{u'^2_0+v'^2_0}}-\frac{2\,v'_0+u'_0}{r\sqrt{u'^2_0+v'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}}\right);$$

$$z'=\frac{\pm r}{\sqrt{u'^2_0+v'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}}\cdot$$

$$\left(-\frac{u'_0\,(u'_0+v'_0)\sqrt{3}}{\sqrt{v'^2+(u'_0+v'_0)^2}}-\frac{v'_0\,(u'_0+v'_0)\sqrt{3}}{\sqrt{u'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{3}\cdot\sqrt{u'^2_0+v'^2_0}+\frac{(u'_0+v'_0)\sqrt{3}}{r\sqrt{u'^2_0+v'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}}\right).$$

dazu: $r\,(u'_0\sqrt{v'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}$
$+\,v'_0\sqrt{u'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}-(u'_0+v'_0)\sqrt{u'^2_0+v'^2_0})$
$-\sqrt{u'^2_0+v'^2_0+(u'_0+v'_0)^2}=0.$

Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir wieder $u'_0=k\,v'_0$ und transformieren gleichzeitig auf das ursprüngliche Koordinatensystem mit Hilfe der obigen Transformationsformeln. In diesem System lauten die Gleichungen des Berührungspunktes:

$$x=\pm r\left(\frac{((k+1)^2+1)^2}{(2\,k^2+2\,k+2)^{3/2}\sqrt{2+2\,k+k^2}}\right.$$
$$+\frac{k}{(2\,k^2+2\,k+2)^{3/2}\sqrt{2\,k^2+2\,k+1}}$$
$$\left.-\frac{k\,(k+1)^3}{(2\,k^2+2\,k+2)^{3/2}\sqrt{k^2+1}}\right);$$

$$y=\pm r\left(\frac{k^3}{(2\,k^2+2\,k+2)^{3/2}\sqrt{2+2\,k+k^2}}\right.$$
$$+\frac{4\,k^2\,(k+1)^2+(2\,k+1)^2}{(2\,k^2+2\,k+2)^{3/2}\sqrt{2\,k^2+2\,k+1}}$$
$$\left.-\frac{(k+1)^3}{(2\,k^2+2\,k+2)^{3/2}\sqrt{k^2+1}}\right);$$

$$z=\pm r\left(\frac{-k^3\,(k+1)}{(2\,k^2+2\,k+2)^{3/2}\sqrt{2+2\,k+k^2}}\right.$$
$$\left.-\frac{k+1}{(2\,k^2+2\,k+2)^{3/2}\sqrt{2\,k^2+2\,k+1}}\right.$$

$$+ \frac{(k^2+1)^{3/2}}{(2k^2+2k+2)^{3/2}}\Big) .$$

Lassen wir nun k variieren, dann haben wir eine Raumkurve und diese ist der Ort der Berührungspunkte obengenannter Ebenen. Es ist hier nicht notwendig, die einzelnen Kurven eingehender zu diskutieren. Der Verlauf der Kurven ist durch punktweise Konstruktion hinreichend genau bestimmt. Folgende Tabelle enthält die Werte der Koordinaten unter Beachtung der Vorzeichen; denn auch in den obigen Gleichungen ist die Vorzeichenregel des Paragraphen eins zu beachten. Dabei sei bemerkt, daß wir oben herüber die dort festgesetzten Zahlen geschrieben haben.

Tabelle der Koordinaten.

		I	II	III	IV
	x	0	$\pm r$	$\pm r$	0
u′=0	y	0	$\pm r \cdot 0{,}707$	$\mp r \cdot 0{,}707$	0
	z	0	$\mp r \cdot 0{,}707$	$\pm r \cdot 0{,}707$	0
	x	0	$\pm r \cdot 0{,}707$	$\mp r \cdot 0{,}707$	0
v′=0	y	0	$\pm r$	$\pm r$	0
	z	0	$\mp r \cdot 0{,}707$	$\pm r \cdot 0{,}707$	0
	x	0	0	$\pm r \cdot 0{,}707$	$\mp r \cdot 0{,}707$
w′=0	y	0	0	$\mp r \cdot 0{,}707$	$\pm r \cdot 0{,}707$
	z	0	0	$\pm r$	$\pm r$
	x	$\pm r \cdot 0{,}406$	$\pm r \cdot 1{,}176$	$\pm r \cdot 0{,}345$	$\mp r \cdot 1{,}115$
k=1	y	$\pm r \cdot 0{,}406$	$\pm r \cdot 1{,}176$	$\mp r \cdot 1{,}115$	$\pm r \cdot 0{,}345$
(u=v)	z	$\pm r \cdot 0{,}071$	$\mp r \cdot 0{,}314$	$\pm r \cdot 0{,}192$	$\pm r \cdot 0{,}192$
	x	$\pm r \cdot 0{,}406$	$\pm r \cdot 0{,}345$	$\pm r \cdot 1{,}176$	$\mp r \cdot 1{,}115$
k=—0,5	y	$\pm r \cdot 0{,}071$	$\pm r \cdot 0{,}192$	$\mp r \cdot 0{,}314$	$\pm r \cdot 0{,}192$
(u=w)	z	$\pm r \cdot 0{,}406$	$\mp r \cdot 1{,}115$	$\pm r \cdot 1{,}176$	$\pm r \cdot 0{,}345$
	x	$\pm r \cdot 0{,}071$	$\pm r \cdot 0{,}192$	$\pm r \cdot 0{,}192$	$\mp r \cdot 0{,}314$
k=—2	y	$\pm r \cdot 0{,}406$	$\pm r \cdot 0{,}345$	$\mp r \cdot 1{,}115$	$\pm r \cdot 1{,}176$
(v=w)	z	$\pm r \cdot 0{,}406$	$\mp r \cdot 1{,}115$	$\pm r \cdot 0{,}345$	$\pm r \cdot 1{,}176$
	x	$\pm r \cdot 0{,}153$	$\pm r \cdot 1{,}075$	$\pm r \cdot 0{,}132$	$\mp r \cdot 1{,}054$
k=2	y	$\pm r \cdot 0{,}713$	$\pm r \cdot 1{,}174$	$\mp r \cdot 1{,}077$	$\pm r \cdot 0{,}616$
(u=2v)	z	$\pm r \cdot 0{,}053$	$\mp r \cdot 0{,}374$	$\pm r \cdot 0{,}084$	$\pm r \cdot 0{,}342$
	x	$\pm r \cdot 0{,}713$	$\pm r \cdot 1{,}174$	$\pm r \cdot 0{,}616$	$\mp r \cdot 1{,}077$
k=0,5	y	$\pm r \cdot 0{,}153$	$\pm r \cdot 1{,}075$	$\mp r \cdot 1{,}054$	$\pm r \cdot 0{,}132$
(v=2u)	z	$\pm r \cdot 0{,}053$	$\mp r \cdot 0{,}374$	$\pm r \cdot 0{,}342$	$\pm r \cdot 0{,}084$

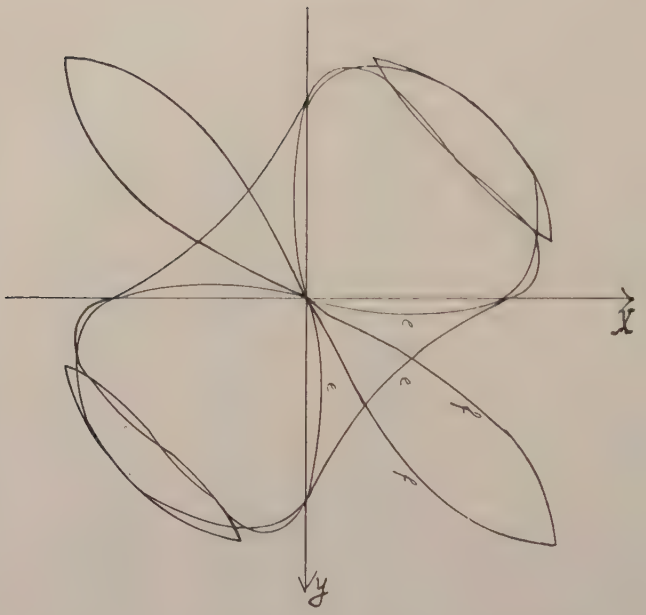
		I	II	III	IV
	x	$\pm r \cdot 0{,}153$	$\pm r \cdot 0{,}132$	$\pm r \cdot 1{,}075$	$\mp r \cdot 1{,}054$
$k=-\frac{2}{3}$	y	$\pm r \cdot 0{,}053$	$\pm r \cdot 0{,}084$	$\mp r \cdot 0{,}374$	$\pm r \cdot 0{,}342$
$(u=2w)$	z	$\pm r \cdot 0{,}713$	$\mp r \cdot 1{,}077$	$\pm r \cdot 1{,}174$	$\pm r \cdot 0{,}616$
	x	$\pm r \cdot 0{,}053$	$\pm r \cdot 0{,}084$	$\pm r \cdot 0{,}342$	$\mp r \cdot 0{,}374$
$k=-\frac{3}{2}$	y	$\pm r \cdot 0{,}153$	$\pm r \cdot 0{,}132$	$\mp r \cdot 1{,}054$	$\pm r \cdot 1{,}075$
$(v=2w)$	z	$\pm r \cdot 0{,}713$	$\mp r \cdot 1{,}077$	$\pm r \cdot 0{,}616$	$\pm r \cdot 1{,}174$
	x	$\pm r \cdot 0{,}713$	$\pm r \cdot 0{,}616$	$\pm r \cdot 1{,}174$	$\mp r \cdot 1{,}077$
$k=-\frac{1}{3}$	y	$\pm r \cdot 0{,}053$	$\pm r \cdot 0{,}342$	$\mp r \cdot 0{,}374$	$\pm r \cdot 0{,}084$
$(w=2u)$	z	$\pm r \cdot 0{,}153$	$\mp r \cdot 1{,}054$	$\pm r \cdot 1{,}075$	$\pm r \cdot 0{,}132$
	x	$\pm r \cdot 0{,}053$	$\pm r \cdot 0{,}342$	$\pm r \cdot 0{,}084$	$\mp r \cdot 0{,}374$
$k=-3$	y	$\pm r \cdot 0{,}713$	$\pm r \cdot 0{,}616$	$\mp r \cdot 1{,}077$	$\pm r \cdot 1{,}174$
$(w=2v)$	z	$\pm r \cdot 0{,}153$	$\mp r \cdot 1{,}054$	$\pm r \cdot 0{,}132$	$\pm r \cdot 1{,}075$
	x	$\pm r \cdot 0{,}075$	$\pm r \cdot 0{,}991$	$\pm r \cdot 0{,}066$	$\mp r \cdot 0{,}982$
$k=3$	y	$\pm r \cdot 0{,}840$	$\pm r \cdot 1{,}145$	$\mp r \cdot 1{,}046$	$\pm r \cdot 0{,}741$
$(u=3v)$	z	$\pm r \cdot 0{,}035$	$\mp r \cdot 0{,}442$	$\pm r \cdot 0{,}047$	$\pm r \cdot 0{,}430$
	x	$\pm r \cdot 0{,}840$	$\pm r \cdot 1{,}145$	$\pm r \cdot 0{,}741$	$\mp r \cdot 1{,}046$
$k=\frac{1}{3}$	y	$\pm r \cdot 0{,}075$	$\pm r \cdot 0{,}991$	$\mp r \cdot 0{,}982$	$\pm r \cdot 0{,}066$
$(v=3u)$	z	$\pm r \cdot 0{,}035$	$\mp r \cdot 0{,}442$	$\pm r \cdot 0{,}430$	$\pm r \cdot 0{,}047$
	x	$\pm r \cdot 0{,}075$	$\pm r \cdot 0{,}066$	$\pm r \cdot 0{,}991$	$\mp r \cdot 0{,}982$
$k=-\frac{3}{4}$	y	$\pm r \cdot 0{,}035$	$\pm r \cdot 0{,}047$	$\mp r \cdot 0{,}442$	$\pm r \cdot 0{,}430$
$(u=3w)$	z	$\pm r \cdot 0{,}840$	$\mp r \cdot 1{,}046$	$\pm r \cdot 1{,}145$	$\pm r \cdot 0{,}741$
	x	$\pm r \cdot 0{,}035$	$\pm r \cdot 0{,}047$	$\pm r \cdot 0{,}430$	$\mp r \cdot 0{,}442$
$k=-\frac{4}{3}$	y	$\pm r \cdot 0{,}075$	$\pm r \cdot 0{,}066$	$\mp r \cdot 0{,}982$	$\pm r \cdot 0{,}991$
$(v=3w$	z	$\pm r \cdot 0{,}840$	$\mp r \cdot 1{,}046$	$\pm r \cdot 0{,}741$	$\pm r \cdot 1{,}145$
	x	$\pm r \cdot 0{,}840$	$\pm r \cdot 0{,}741$	$\pm r \cdot 1{,}145$	$\mp r \cdot 1{,}046$
$k=-\frac{1}{4}$	y	$\pm r \cdot 0{,}035$	$\pm r \cdot 0{,}430$	$\mp r \cdot 0{,}442$	$\pm r \cdot 0{,}047$
$(w=3u)$	z	$\pm r \cdot 0{,}075$	$\mp r \cdot 0{,}982$	$\pm r \cdot 0{,}991$	$\pm r \cdot 0{,}066$
	x	$\pm r \cdot 0{,}053$	$\pm r \cdot 0{,}430$	$\pm r \cdot 0{,}047$	$\mp r \cdot 0{,}442$
$k=-4$	y	$\pm r \cdot 0{,}840$	$\pm r \cdot 0{,}741$	$\mp r \cdot 1{,}046$	$\pm r \cdot 1{,}145$
$(w=3v)$	z	$\pm r \cdot 0{,}075$	$\mp r \cdot 0{,}982$	$\pm r \cdot 0{,}066$	$\pm r \cdot 0{,}991$
	x	$\pm r \cdot 0{,}044$	$\pm r \cdot 0{,}935$	$\pm r \cdot 0{,}039$	$\mp r \cdot 0{,}930$
$k=4$	y	$\pm r \cdot 0{,}899$	$\pm r \cdot 1{,}122$	$\mp r \cdot 1{,}030$	$\pm r \cdot 0{,}807$
$(u=4v)$	z	$\pm r \cdot 0{,}024$	$\mp r \cdot 0{,}491$	$\pm r \cdot 0{,}030$	$\pm r \cdot 0{,}485$
	x	$\pm r \cdot 0{,}899$	$\pm r \cdot 1{,}122$	$\pm r \cdot 0{,}807$	$\mp r \cdot 1{,}030$
$k=\frac{1}{4}$	y	$\pm r \cdot 0{,}044$	$\pm r \cdot 0{,}935$	$\mp r \cdot 0{,}930$	$\pm r \cdot 0{,}039$
$(v=4u)$	z	$\pm r \cdot 0{,}024$	$\mp r \cdot 0{,}491$	$\pm r \cdot 0{,}485$	$\pm r \cdot 0{,}030$
	x	$\pm r \cdot 0{,}044$	$\pm r \cdot 0{,}039$	$\pm r \cdot 0{,}935$	$\mp r \cdot 0{,}930$
$k=-\frac{4}{5}$	y	$\pm r \cdot 0{,}024$	$\pm r \cdot 0{,}030$	$\mp r \cdot 0{,}491$	$\pm r \cdot 0{,}485$
$(u=4w)$	z	$\pm r \cdot 0{,}899$	$\mp r \cdot 1{,}030$	$\pm r \cdot 1{,}122$	$\pm r \cdot 0{,}807$
	x	$\pm r \cdot 0{,}024$	$\pm r \cdot 0{,}030$	$\pm r \cdot 0{,}485$	$\mp r \cdot 0{,}491$
$k=-\frac{5}{4}$	y	$\pm r \cdot 0{,}044$	$\pm r \cdot 0{,}039$	$\mp r \cdot 0{,}930$	$\pm r \cdot 0{,}935$
$(v=4w)$	z	$\pm r \cdot 0{,}899$	$\mp r \cdot 1{,}030$	$\pm r \cdot 0{,}807$	$\pm r \cdot 1{,}122$

		I	II	III	IV
	x	$\pm r \cdot 0{,}899$	$\pm r \cdot 0{,}807$	$\pm r \cdot 1{,}122$	$\mp r \cdot 1{,}030$
$k = -\frac{1}{5}$	y	$\pm r \cdot 0{,}024$	$\pm r \cdot 0{,}485$	$\mp r \cdot 0{,}491$	$\pm r \cdot 0{,}030$
(w =4u)	z	$\pm r \cdot 0{,}044$	$\mp r \cdot 0{,}930$	$\pm r \cdot 0{,}935$	$\pm r \cdot 0{,}039$
	x	$\pm r \cdot 0{,}024$	$\pm r \cdot 0{,}485$	$\pm r \cdot 0{,}030$	$\mp r \cdot 0{,}491$
k=—5	y	$\pm r \cdot 0{,}899$	$\pm r \cdot 0{,}807$	$\mp r \cdot 1{,}030$	$\pm r \cdot 1{,}122$
(w =4v)	z	$\pm r \cdot 0{,}044$	$\mp r \cdot 0{,}930$	$\pm r \cdot 0{,}039$	$\pm r \cdot 0{,}935$
	x	$\pm r \cdot 0{,}020$	$\pm r \cdot 0{,}868$	$\pm r \cdot 0{,}018$	$\mp r \cdot 0{,}867$
k=6	y	$\pm r \cdot 0{,}950$	$\pm r \cdot 1{,}092$	$\mp r \cdot 1{,}015$	$\pm r \cdot 0{,}874$
(u =6v)	z	$\pm r \cdot 0{,}013$	$\mp r \cdot 0{,}551$	$\pm r \cdot 0{,}015$	$\pm r \cdot 0{,}549$
	x	$\pm r \cdot 0{,}950$	$\pm r \cdot 1{,}092$	$\pm r \cdot 0{,}874$	$\mp r \cdot 1{,}015$
$k = \frac{1}{6}$	y	$\pm r \cdot 0{,}020$	$\pm r \cdot 0{,}868$	$\mp r \cdot 0{,}867$	$\pm r \cdot 0{,}018$
(v =6u)	z	$\pm r \cdot 0{,}013$	$\mp r \cdot 0{,}551$	$\pm r \cdot 0{,}549$	$\pm r \cdot 0{,}015$
	x	$\pm r \cdot 0{,}020$	$\pm r \cdot 0{,}018$	$\pm r \cdot 0{,}868$	$\mp r \cdot 0{,}867$
$k = -\frac{6}{7}$	y	$\pm r \cdot 0{,}013$	$\pm r \cdot 0{,}015$	$\mp r \cdot 0{,}551$	$\pm r \cdot 0{,}549$
(u =6w)	z	$\pm r \cdot 0{,}950$	$\mp r \cdot 1{,}015$	$\pm r \cdot 1{,}092$	$\pm r \cdot 0{,}874$
	x	$\pm r \cdot 0{,}013$	$\pm r \cdot 0{,}015$	$\pm r \cdot 0{,}549$	$\mp r \cdot 0{,}551$
$k = -\frac{7}{6}$	y	$\pm r \cdot 0{,}020$	$\pm r \cdot 0{,}018$	$\mp r \cdot 0{,}867$	$\pm r \cdot 0{,}868$
(v=6w)	z	$\pm r \cdot 0{,}950$	$\mp r \cdot 1{,}015$	$\pm r \cdot 0{,}874$	$\pm r \cdot 1{,}092$
	x	$\pm r \cdot 0{,}950$	$\pm r \cdot 0{,}874$	$\pm r \cdot 1{,}092$	$\mp r \cdot 1{,}015$
$k = -\frac{1}{7}$	y	$\pm r \cdot 0{,}013$	$\pm r \cdot 0{,}549$	$\mp r \cdot 0{,}551$	$\pm r \cdot 0{,}015$
(w=6u)	z	$\pm r \cdot 0{,}020$	$\mp r \cdot 0{,}867$	$\pm r \cdot 0{,}868$	$\pm r \cdot 0{,}018$
	x	$\pm r \cdot 0{,}013$	$\pm r \cdot 0{,}549$	$\pm r \cdot 0{,}015$	$\mp r \cdot 0{,}551$
k=—7	y	$\pm r \cdot 0{,}950$	$\pm r \cdot 0{,}874$	$\mp r \cdot 1{,}015$	$\pm r \cdot 1{,}092$
(w=6v)	z	$\pm r \cdot 0{,}020$	$\mp r \cdot 0{,}867$	$\pm r \cdot 0{,}018$	$\pm r \cdot 0{,}868$

Mit Hilfe dieser Tabelle können nun die Kurven gezeichnet werden. Betrachten wir die Projektionen genauer, so zeigt es sich, daß wir eine Reihe von Kurven unberücksichtigt lassen können in den folgenden Untersuchungen, da sie für die Gestalt der Fläche keine neuen Momente bieten. Dies sind die inneren Kurven, welche in den Zeichnungen mit e bezeichnet sind. Wichtiger sind die in den Zeichnungen mit f bezeichneten Kurven. Diese Kurven sind sämtlich zu einander kongruent, bezw. symmetrisch.

Aus Gründen der Symmetrie der Fläche folgt, daß in jedem Oktanten drei e- und drei f-Kurven existieren.

Die aus obiger Tabelle konstruierbaren Kurven sind aus folgender Zeichnung ersichtlich.



Die von der positiven X-Achse ausgehenden Kurven seien mit f_1 und f'_1 bezeichnet, wobei f_1 gegen die positive Z-Achse, f'_1 gegen die negative Z-Achse liege; analog gehen f_2, f'_2 von der positiven Y-Achse aus; f_2 liege gegen die negative, f'_2 gegen die positive Z-Achse; von der positiven Z-Achse laufen die Kurven f_3 und f'_3 aus, wobei f_3 gegen die positive Y-Achse, f'_3 gegen die positive X-Achse gewendet sei. Wir wollen nun im folgenden den Zusammenhang dieser Kurven unter sich untersuchen.

Zunächst erhalten wir einen gemeinsamen Punkt der Kurven f'_3 und f_2. Die Koordinaten hiefür sind: $x = \pm r$, $y = \pm r \cdot 0{,}707$, $z = \pm r \cdot 0{,}707$. Dieser Punkt wird erhalten, wenn wir $u = 0$ setzen. Aus den Koordinaten des Punktes können wir aber noch ein neues Resultat herauslesen. Wir erkennen, daß dieser Punkt sowohl auf der Kurve a_1 wie auf der Kurve $b''_{1,2}$ liegt; damit haben wir aber auch schon den Zusammenhang der f-Kurven mit den a- und b-Kurven teilweise erledigt.

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich noch die Punkte:

$$(f'_1, f_3) \text{ auf } b'''_{1,2} \text{ und } a_2,$$
$$(f'_2, f_1) \text{ auf } b'_{1,2} \text{ und } a_3.$$

Mit den b-Kurven ergeben sich noch drei gemeinsame Punkte für die f-Kurven. Wir erhalten die Koordinaten eines solchen Punktes, wenn wir in den obigen Gleichungen $u = v$ setzen. Aus der Tabelle ergibt sich hienach für die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von (f'_3, f_3) $x - y = + r \cdot 1{,}176$, $z = + 0{,}314$. Da $u = v$ gesetzt wurde, folgt weiter, daß der Punkt auch der Kurve b'_1 angehört. Entsprechend erhalten wir noch zwei Punkte, nämlich:

$$(f'_1, f_1) \text{ auf } b''_1 \text{ und}$$
$$(f'_2, f_2) \text{ auf } b'''_1.$$

Damit ist der Zusammenhang der f-Kurven mit den b-Kurven vollständig bestimmt.

Aus den Projektionen der f-Kurven, wie auch aus Symmetriegründen folgt, daß auch die Kurven

$$(f_1, f'_3), (f_2, f'_1), (f_3, f'_2)$$

einen Punkt gemeinsam haben müssen. Um nun auch analytisch den Nachweis zu erbringen, fordern wir zum Beispiel in den Gleichungen für die Kurven f_1, f'_3, daß $x = y$ werde. Als Bedingung für k ergibt sich, wobei wir die Vorzeichenfolge unter IV beachten müssen, die folgende:

$$\frac{k^4 + 5k^3 + 8k^2 + 8k + 4}{\sqrt{2 + 2k + k^2}}$$
$$- \frac{4k^4 + 8k^3 + 8k^2 + 5k + 1}{\sqrt{2k^2 + 2k + 1}} + \frac{(k+1)^4}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0.$$

Als eine Wurzel dieser Gleichung ergibt sich $k = 5{,}848$. Die Koordinaten dieses Punktes sind:

$$x = y = r \cdot 0{,}870,$$
$$z = r \cdot 0{,}546.$$

Durch diese Feststellungen ist der Zusammenhang der f-Kurven unter einander auch analytisch bewiesen.

Wir gehen nun zur Untersuchung des Zusammenhangs der f-Kurven mit den c- und d-Kurven über. Auch hier müssen wir wieder eine Koordinatentransformation vor-

nehmen. Wir führen folgendes Koordinatensystem ein: Als Z′-Achse wählen wir die oben angeführte, für welche $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist, während wir als X′-Achse bez. Y′-Achse jene wählen, welche mit der X-Achse den Winkel φ bez. den Winkel $90^0 + \varphi$ bilden; d. h. wir transformieren zuerst auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit neuer Z′-Achse unter Beibehaltung der alten X- und Y-Achse unter Beibehaltung der alten X- uud Y-Achse und drehen dann dieses System um den Winkel φ unter Beibehaltung der Z′-Achse.

Die Transformationsformeln sind, wenn wir die bereits oben ausgeführte Transformation auf die Z′-Achse benützen, die folgenden:

$u' = u'' \cos\varphi - v'' \sin\varphi, \quad x = x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi + z'' \cos\alpha,$
$v' = u'' \sin\varphi + v'' \cos\varphi, \quad y = x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi + z'' \cos\alpha,$
$w' = w''; \quad z = z'' \cos\alpha.$

Die transformierte Gleichung der Fläche lautet:

$$r \cdot \Big((u'' \cos\varphi - v'' \sin\varphi)\sqrt{(u'' \sin\varphi + v'' \cos\varphi)^2}$$
$$+ \big(w''\sqrt{3} - (u''\sqrt{2}\cos(45-\varphi) + v''\sqrt{2}\sin(45-\varphi)\big)^2$$
$$+ (u'' \sin\varphi + v'' \cos\varphi)\sqrt{(u'' \cos\varphi + v'' \sin\varphi)^2}$$
$$+ \big(w''\sqrt{3} - (u''\sqrt{2}\cos(45-\varphi) + v''\sqrt{2}\sin(45-\varphi)\big)^2$$
$$+ \big(w''\sqrt{3} - (u''\sqrt{2}\cos(45-\varphi) + v''\sqrt{2}\sin(45-\varphi)\big)\sqrt{u''^2 + v''^2}$$
$$- \sqrt{u''^2 + v''^2} + \big(w''\sqrt{3} - (u''\sqrt{2}\cos(45-\varphi)$$
$$+ v''\sqrt{2}\sin(45-\varphi)\big)^2 = 0.$$

Wir bilden nun die ersten Derivierten unter gleichzeitiger Beachtung, daß $w'' = 0$, $v'' = 0$ gesetzt wird; $w'' = 0$ gibt die Totalität der Tangentenebenen der Fläche parallel zur Z″-Achse, $v'' = 0$ die der Ebenen parallel zur Y″-Achse; $w'' = 0$, $v'' = 0$ eine zu beiden Achsen parallele Ebene. Der Ort der Berührungspunkte der Tangentenebenen parallel zur Z″-Achse sind aber die f-Kurven, der der Ebenen parallel zur Y″-Achse die φ-Kurven; der Berührungspunkt der Tangentenebene $w'' = 0$, $v'' = 0$ gehört demnach sowohl dem einen

wie dem anderen Kurvensysteme an, ist also ein gemeinsamer Punkt. Die Gleichungen des Berührungspunktes lauten:

$$x'' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + 2\cos^2(45-\varphi)}}\Big(\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi)} + \sin\varphi\sqrt{\cos^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi)} - \sqrt{2}\cos(45-\varphi)\Big);$$

$$y'' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + 2\cos^2(45-\varphi)}} \cdot$$

$$\Bigg(\frac{\overrightarrow{(\sin\varphi\cos 2\varphi + 2\cos(45-\varphi)\sin(45-2\varphi))(1+2\cos^2(45-\varphi))}}{(1+2\cos^2(45-\varphi))\sqrt{\sin^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi)}} - \frac{\overleftarrow{\cos 2\varphi\cos\varphi(\sin^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi))}}{(1+2\cos^2(45-\varphi))\sqrt{\sin^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi)}} + \frac{\overrightarrow{(\cos 2\varphi\cos\varphi + 2\cos(45-\varphi)\cos(45-2\varphi))}}{(1+2\cos^2(45-\varphi))\sqrt{\cos^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi)}} \cdot$$

$$\frac{\overleftarrow{(1+2\cos^2(45-\varphi)) - \sin\varphi\cos 2\varphi(\cos^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi))}}{1+2\cos^2(45-\varphi)} - \frac{\sqrt{2}(\sin(45-\varphi)(1+2\cos^2(45-\varphi)) - \cos(45-\varphi)\cos 2\varphi)}{1+2\cos^2(45-\varphi)}\Bigg);$$

$$z'' = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + 2\cos^2(45-\varphi)}} \cdot$$

$$\Bigg(-\frac{\sqrt{6}\cos^3\varphi\cos(45-\varphi)}{(1+2\cos^2(45-\varphi))\sqrt{\sin^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi)}} - \frac{\sqrt{6}\sin^3\varphi\cos(45-\varphi)}{(1+2\cos^2(45-\varphi))\sqrt{\cos^2\varphi + 2\cos^2(45-\varphi)}} - \frac{\sqrt{3}}{1+2\cos^2(45-\varphi)}\Bigg) \cdot$$

Mit Hilfe dieser Formeln ist es möglich, den Zusammenhang der e- und f-Kurven mit sämtlichen bisher behandelten Kurven zu eruieren. So erhalten wir z. B. für $\varphi = 0$, $= 90^0$, den Zusammenhang der Kurven mit den Astroiden, für $\varphi = 45^0$ den Zusammenhang mit den b-Kurven. Doch ergeben diese Resultate nichts neues, da der Zusammenhang mit den genannten Kurven bereits festgestellt ist. Setzen wir $\varphi = 15^0$, so erhalten wir den Zusammenhang mit den d-Kurven. Die Gleichungen der Berührungspunkte der Ebenen, welche in diesem Falle den Zusammenhang vermitteln, lauten:

$$x'' = \frac{\pm 2r}{\sqrt{10}}\left(\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{8-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{3}-1)\sqrt{8+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right);$$

$$y'' = \frac{\pm 2r}{\sqrt{10}}\left(\frac{30\sqrt{6}(\sqrt{3}-1) - \sqrt{6}(\sqrt{3}+1)(8-\sqrt{3})}{40\sqrt{8-\sqrt{3}}} - \right.$$

$$\left. + \frac{30\sqrt{6}(\sqrt{3}+1) - \sqrt{6}(\sqrt{3}-1)(8+\sqrt{3})}{40\sqrt{8+\sqrt{3}}} - \frac{2\sqrt{2}}{10}\right);$$

$$z'' = \frac{\pm 2r}{\sqrt{10}}\left(-\frac{3(6\sqrt{3}+10)}{40\sqrt{8-\sqrt{3}}} - \frac{3(6\sqrt{3}-10)}{40\sqrt{8+\sqrt{3}}} + \frac{2\sqrt{3}}{5}\right).$$

Transformieren wir auf das ursprüngliche Koordinatensystem und beachten wir gleichzeitig die Vorzeichen, so erhalten die Koordinaten der gemeinsamen Punkte die folgenden Werte:

$x_1 = \pm r \cdot 0{,}650$, $x_2 = \pm r \cdot 0{,}948$, $x_3 = \pm r \cdot 0{,}045$, $x_4 = \mp r \cdot 0{,}942$,
$y_1 = \pm r \cdot 0{,}887$, $y_2 = \pm r \cdot 1{,}128$, $y_3 = \mp r \cdot 1{,}033$, $y_4 = \pm r \cdot 0{,}793$,
$z_1 = \pm r \cdot 0{,}026$, $z_2 = \mp r \cdot 0{,}479$, $z_3 = \pm r \cdot 0{,}033$, $z_4 = \pm r \cdot 0{,}473$.

Den Punkt (x_1, y_1, z_1) lassen wir unberücksichtigt, da dies ein Punkt der e-Kurven ist. Dagegen liefert das Wertetripel (x_2, y_2, z_2) einen gemeinsamen Punkt zwischen f_3 und d'_1, (x_3, y_3, z_3) einen solchen zwischen f'_1 und d'_4 und (x_4, y_4, z_4) einen zwischen f_3 und d'_3. Durch zyklische Vertauschung ergeben sich hieraus die Punktegruppen:

(f_3, d'_1), (f_1, d''_1), (f_2, d'''_1); (f'_3, d'_{1s}), (f'_1, d''_{1s}), (f'_2, d'''_{1s});
(f'_1, d'_4), (f'_2, d''_4), (f'_3, d'''_4); (f'_1, d'_{4s}), (f'_2, d''_{4s}), (f'_3, d'''_{4s});
(f_3, d'_3), (f_1, d''_3), (f_2, d'''_3); (f'_3, d'_{3s}), (f'_1, d''_{3s}), (f'_2, d'''_{3s}).

Die rechte Seite der Gruppen ergibt sich infolge der Flächensymmetrie. Diese Punkte sind aber gleichzeitig auch die Punkte, welche wir erhalten, wenn wir für $\varphi = 75^0$ setzen. Die sich ergebenden Koordinaten für diese Punkte mögen des Vergleichs halber angeführt werden:

$x_1 = \pm r \cdot 0{,}887$, $x_2 = \pm r \cdot 1{,}128$, $x_3 = \pm r \cdot 0{,}793$, $x_4 = \mp r \cdot 1{,}033$,
$y_1 = \pm r \cdot 0{,}050$, $y_2 = \pm r \cdot 0{,}948$, $y_3 = \mp r \cdot 0{,}942$, $y_4 = \pm r \cdot 0{,}045$,
$z_1 = \pm r \cdot 0{,}026$; $z_2 = \mp r \cdot 0{,}479$; $z_3 = \pm r \cdot 0{,}473$; $z_4 = \pm r \cdot 0{,}033$.

Wir ersehen, daß nur x und y vertauscht sind. Für $\varphi = 30^0$ erhalten wir den Zusammenhang mit den c-Kurven. Die Gleichungen für die gemeinsamen Punkte sind:

$$x'' = \frac{\pm 2r}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}\left(\frac{\sqrt{3}(5+2\sqrt{3})}{4(\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \frac{7+2\sqrt{3}}{4\sqrt{7+2\sqrt{3}}} - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\right);$$

$$y'' = \frac{\pm 2r}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}\left(-\frac{(8+2\sqrt{3})+\sqrt{3}(5+2\sqrt{3})}{4(4+\sqrt{3})\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \frac{(4+3\sqrt{3})(8+2\sqrt{3})-(7+2\sqrt{3})}{4(4+\sqrt{3})\sqrt{5+2\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}}\right);$$

$$z'' = \frac{\pm 2r}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}\left(-\frac{9(\sqrt{3}+1)}{4(4+\sqrt{3})\sqrt{5+2\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(4+\sqrt{3})\sqrt{7+2\sqrt{3}}} + \frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\right).$$

Berechnen wir obige Ausdrücke, transformieren wir wieder auf das ursprüngliche Koordinatensystem und beachten die Vorzeichen, so ergeben sich folgende Koordinatentripel:

$x_1 = \pm r \cdot 0{,}204$, $x_2 = \pm r \cdot 1{,}093$, $x_3 = \pm r \cdot 0{,}176$, $x_4 = \mp r \cdot 1{,}065$,
$y_1 = \pm r \cdot 0{,}656$, $y_2 = \pm r \cdot 1{,}181$, $y_3 = \mp r \cdot 0{,}089$, $y_4 = \pm r \cdot 0{,}563$,
$z_1 = \pm r \cdot 0{,}062$; $z_2 = \mp r \cdot 0{,}353$; $z_3 = \pm r \cdot 0{,}105$; $z_4 = \pm r \cdot 0{,}310$.

Auch hier bleibt der Punkt (x_1, y_1, z_1) außer acht. Die Werte (x_2, y_2, z_2) liefern den gemeinsamen Punkt von f_3 mit c'_1, die von (x_3, y_3, z_3) den gemeinsamen Punkt von f'_1 mit c'_4 und endlich (x_4, y_4, z_4) den gemeinsamen Punkt von f_3 mit c'_3. Wie oben erhalten wir die Gruppen:

(f_3, c'_1), (f_2, c''_1), (f_2, c'''_1); (f'_3, c'_{1s}), (f'_1, c''_{1s}), (f'_2, c'''_{1s});
(f'_1, c'_4), (f'_2, c''_4), (f'_3, c'''_4); (f_1, c'_{4s}), (f_2, c''_{4s}), (f_3, c'''_{4s});
(f_3, c'_3), (f_1, c''_3), (f_2, c'''_3); (f'_3, c'_{3s}), (f'_1, c''_{3s}), (f'_2, c'''_{3s}).

Die rechte Seite der Gruppe enthält wieder die zu den linken symmetrisch liegenden Punkte. Diese Punkte würden sich für $\varphi = 60^0$ ergeben. Die Koordinaten hiefür lauten:

$x_1 = \pm r \cdot 0{,}655$, $x_2 = \mp r \cdot 1{,}181$, $x_3 = \pm r \cdot 0{,}563$, $x_4 = \mp r \cdot 1{,}089$,
$y_1 = \pm r \cdot 0{,}204$, $y_2 = \pm r \cdot 1{,}093$, $y_3 = \mp r \cdot 1{,}065$, $y_4 = \pm r \cdot 0{,}176$,
$z_1 = \pm r \cdot 0{,}059$; $z_2 = \mp r \cdot 0{,}354$; $z_3 = \pm r \cdot 0{,}310$; $z_4 = \pm r \cdot 0{,}102$.

Mit diesen letzten Feststellungen ist auch der Zusammenhang dieser Kurven sowohl unter sich wie auch mit allen bisherigen Kurven zum Abschluß gebracht.

§ 8. Der Schnitt der Winkelhalbierungsebenen zwischen den Koordinatenebenen mit der Fläche.

Im Verlaufe der Untersuchungen hat sich dem Verfasser bei den Berechnungen häufig eine Frage aufgedrängt, die bisher absichtlich nicht gestreift wurde. Wir wollen nun auf diese Frage näher eingehen. Für den gemeinsamen Punkt der Kurven (a_1, a_2) z. B. mußte $x = y$ gefordert werden. Nun liegt die Kurve b'_1 ganz in der Winkelhalbierungsebene zwischen der (XZ)- und (YZ)-Ebene. Für alle Punkte dieser Kurve ist auch $x = y$. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß der gemeinsame Punkt von (a_1, a_2) auch der Kurve b'_1 angehört. Das ist aber nicht der Fall. Vielmehr liegt der Punkt (a_1, a_2) unter der b'_1 Kurve, sein Koordinatenwert für z ist kleiner als der den Werten (x, y) entsprechende Wert von z für b'_1. Für Punkt (a_1, a_2) ist der Wert von $z = r \cdot 0{,}450$; für b'_1 der dem Punkte (a_1, a_2) entsprechende Wert von z, d. h. wenn wir in beiden Fällen die demselben Werte von x, y, zugehörigen Werte von z bestimmen, gleich $r \cdot 0{,}517$. Es zeigt sich, daß der Wert von z für (a_1, a_2) kleiner ist als der entsprechende Wert von z für b'_1, d. h. der Punkt (a_1, a_2) liegt nicht auf der b'_1 Kurve, sondern unter ihr, aber in derselben Ebene. Nun gibt es aber eine ganze Reihe von Punkten in den vorhergehenden Untersuchungen, für die $x = y$ gefordert wurde und es zeigt sich, daß alle diese Punkte nicht auf der b'_1 Kurve liegen. In diesen Punkten gibt es aber auch, wie uns bekannt ist, nicht eine gemeinsame Tangentenebene, sondern zwei verschiedene Ebenen. Wir haben eine Doppelkurve auf der Fläche vor uns. Nun gelingt es aber nicht, eine Gleichung für die Schnittkurve aufzustellen, die gleichzeitig alle Punkte der Kurve liefert; wir müssen also versuchen die Kurve punktweise zusammenzustellen.

Bevor wir aber die Zusammenstellung ausführen, wollen wir noch den Nachweis erbringen, daß wirklich eine Kurve zu Stande kommt. Damit ein Punkt in der Winkelhalbierungsebene liege, muß die Forderung x y erfüllt sein oder was dasselbe ist unter Zuhilfenahme der Gleichungen des Paragraphen eins

$$\frac{(k^2 \sin^2\varphi + 1)^2 - k^4 \sin\varphi \cos^3\varphi}{\sqrt{k^2 \sin^2\varphi + 1}}$$
$$+ \frac{k^4 \sin^3\varphi \cos\varphi - (k^2 \cos^2\varphi + 1)^2}{\sqrt{k^2 \cos^2\varphi + 1}} + (\cos\varphi - \sin\varphi) = 0.$$

Hieraus folgt $k = f(\varphi)$. Wir transformieren nun die Gleichungen von x′, y′, z′ des § 1 auf das ursprüngliche Koordinatensystem und erhalten folgende Gleichungen für x, y, z:

$$x = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2 + 1}} \left(\frac{(k^2 \sin^2\varphi + 1)^2}{(k^2 + 1)\sqrt{k^2 \sin^2\varphi + 1}} \right.$$
$$\left. + \frac{k^4 \sin^3\varphi \cos\varphi}{(k^2 + 1)\sqrt{k^2 \cos^2\varphi + 1}} + \frac{\cos\varphi}{k^2 + 1} \right);$$

$$y = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2 + 1}} \left(\frac{k^4 \sin\varphi \cos^3\varphi}{(k^2 + 1)\sqrt{k^2 \sin^2\varphi + 1}} \right.$$
$$\left. + \frac{(k^2 \cos^2\varphi + 1)^2}{(k^2 + 1)\sqrt{k^2 \cos^2\varphi + 1}} + \frac{\sin\varphi}{k^2 + 1} \right);$$

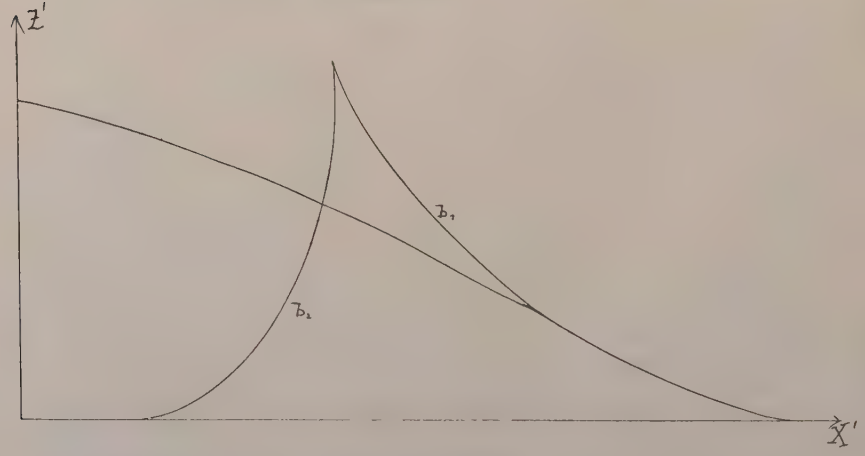
$$z = \frac{\pm r}{\sqrt{k^2 + 1}} \left(\frac{k^3 \cos^3\varphi}{(k^2 + 1)\sqrt{k^2 \sin^2\varphi + 1}} \right.$$
$$\left. + \frac{k^3 \sin^3\varphi}{(k^2 + 1)\sqrt{k^2 \cos^2\varphi + 1}} + \frac{k^3}{k^2 + 1} \right).$$

Setzen wir in die Gleichungen $k = f(\varphi)$ ein, so muß x=y werden. Wir erhalten dann die Gleichung einer ebenen Kurve in Parameterform. Es ist nicht notwendig näher auf die Diskussion der Gleichungen einzugehen. Wir beschränken uns auf eine punktweise Konstruktion der Doppelkurve, während wir die b'_1 und b'_2 Kurve nach früherem zeichnen können; beide Kurven zusammen geben die Schnittkurve. In der folgenden Tabelle sind die Koordinaten einer Reihe von Punkten eingetragen, die in früheren Rechnungen gefunden wurden. Die Anlage der Tabelle bedarf keiner Erklärung.

Tabelle der Koordinaten.

	k	x = y.	z
§ 5 (c'_1, c'_{1s})	0.63484	$\pm r \cdot 1{,}225$	$\pm r \cdot 0{,}266$
§ 5 (c'''_1, c''_{1s})	4.0855	$\pm r \cdot 1{,}209$	$\pm r \cdot 0{,}281$
§ 6 (d'''_1, d''_{1s})	1,7563	$\pm r \cdot 1{,}200$	$\pm r \cdot 0{,}285$
§ 6 (d'_1, d'_{1s})	0,67801	$\pm r \cdot 1{,}143$	$\pm r \cdot 0{,}336$
§ 3 (a_1, a_2)		$\pm r$	$\pm r \cdot 0{,}450$
§ 7 (f'_1, f'_3)		$\pm r \cdot 0{,}870$	$\pm r \cdot 0{,}546$
§ 6 (d'_3, d'_{3s})	0.9467	$\pm r \cdot 0{,}784$	$\pm r \cdot 0{,}605$
§ 6 (d'''_3, d''_{3s})	1,1147	$\pm r \cdot 0{,}765$	$\pm r \cdot 0{,}618$
§4 (b'_2, b''_2, b'''_2)	—2,639	$\pm r \cdot 0{,}675$	$\pm r \cdot 0{,}675$
§ 5 (c'''_3, c''_{3s})	—1,01476	$\pm r \cdot 0{,}537$	$\pm r \cdot 0{,}757$
§ 5 (c'_3, c'_{3s})	1,4368	$\pm r \cdot 0{,}455$	$\pm r \cdot 0{,}801$
§ 4 (b''_4, b'''_3)	—0,678	$\pm r \cdot 0{,}332$	$\pm r \cdot 0{,}863$
§ 5 (c''_2, c'''_{2s})	—1,5486	$\pm r \cdot 0{,}244$	$\pm r \cdot 0{,}903$
§ 5 (c''_{4s}, c'''_4)	—0,93378	$\pm r \cdot 0{,}162$	$\pm r \cdot 0{,}938$
§ 6 (d''_2, d'''_{2s})	—1,1493	$\pm r \cdot 0{,}054$	$\pm r \cdot 0{,}980$
§ 6 (d''_{4s}, d'''_4)	—0,94185	$\pm r \cdot 0{,}044$	$\pm r \cdot 0{,}984$

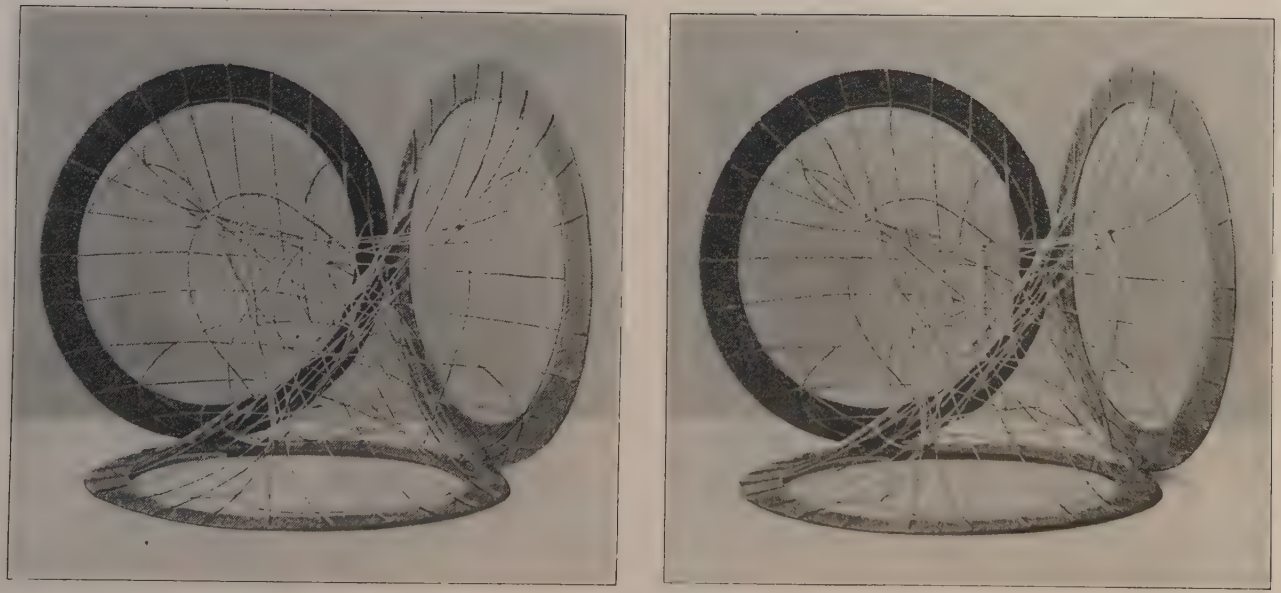
Die Zeichnung des Schnittes ist in folgende Zeichnung für einen Oktanten durchgeführt.



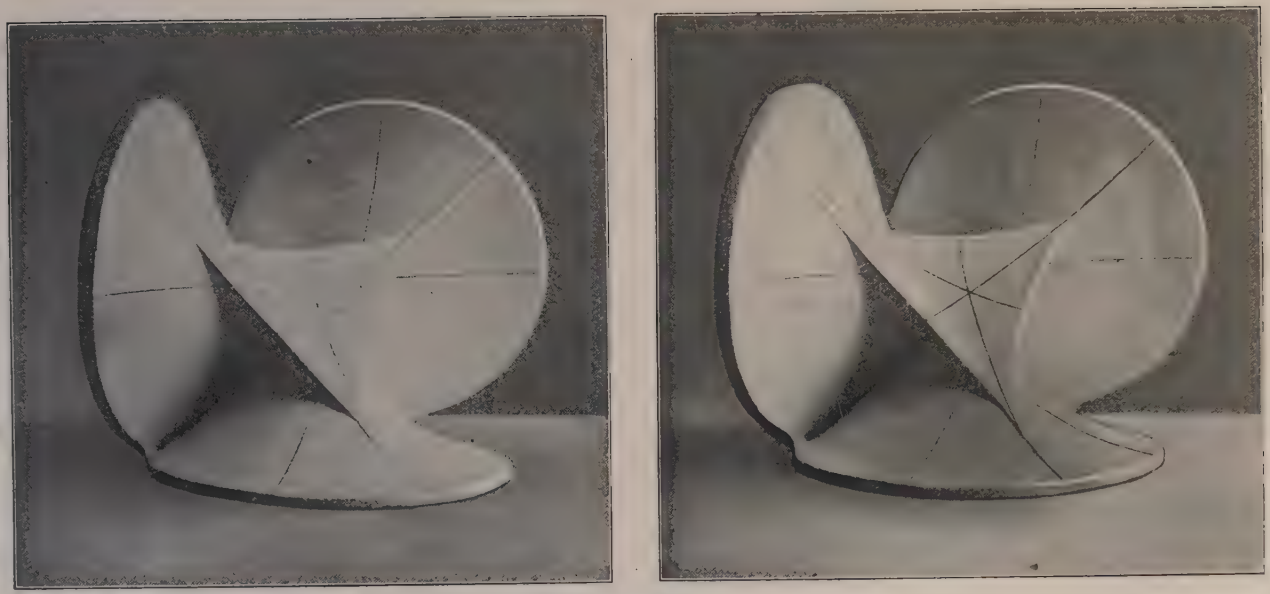
§ 9. Schluß.

Zum Schlusse wäre wohl noch eine Zeichnung der Kurven in ihrer Gesamtheit erwünscht, denn bis jetzt haben wir nur die einzelnen Kurven untersucht und ihre gemeinsamen Punkte unter einander festgestellt. Nun ist es aber

auf Grund der geführten Untersuchungen ein leichtes ein Drahtmodell der Kurven herzustellen. Für einen Oktanten hat Verfasser der Arbeit ein solches hergestellt und liegt dasselbe bei. Aus diesem allein schon kann man sich eine Vorstellung von der Fläche machen, doch ist es nicht gerade leicht, in dem Kurvengewirre sich zurecht zu finden. Klarer und deutlicher tritt die Gestalt der Fläche in dem Gipsmodelle hervor, welches ebenfalls von dem Verfasser der Arbeit angefertigt wurde. Auch bei dem Gipsmodelle ist nur ein Oktant der Fläche berücksichtigt worden. Von beiden Modellen wurden stereoskopische Aufnahmen gemacht, die sich auf den beiden folgenden Seiten befinden. Auf Grund der Modelle sowie der photographischen Aufnahmen kann von einer Beschreibung der Fläche abgesehen werden. Sie geben von der Gestalt der Fläche ein so klares Bild wie es niemals durch Zeichnungen, geschweige denn durch Worte dargestellt werden könnte.



Drahtmodell.



Gipsmodell.